Übungsblatt 1

1) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen sowohl in der Form $r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ als auch in der Form $re^{j\varphi}$ an.

$z_1 = 2 + 4j$ $\quad z_2 = -3 - 4j$ $\quad z_3 = -2 + 3j$

$z_4 = 2 + 2\sqrt{3}\,j$ $\quad z_5 = -5 + 5j$ $\quad z_6 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}\,j$

2) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form a + jb dar.

$z_1 = 3e^{j\pi/4}$ $\quad z_2 = -3e^{-j\pi/4}$ $\quad z_3 = \sqrt{2}\,e^{j5\pi/4}$

$z_4 = e^{j7\pi/6}$ $\quad z_5 = 2e^{j13\pi/6}$ $\quad z_6 = 2e^{-j\pi/6}$

$z_7 = [2e^{j\pi/2}]^3$ $\quad z_8 = 2e^{j\pi}$ $\quad z_9 = [e^{j\pi/4}]^5$

3) Bilden Sie mit den komplexen Zahlen aus 2)

$z_1 \cdot z_2 \quad z_1 \cdot z_3 \quad z_2 \cdot z_3 \quad \frac{z_1}{z_2} \quad \frac{z_1}{z_3} \quad \frac{z_2}{z_3}$

Führen Sie die Berechnungen einmal in der Form a + jb sowie in der Form $r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ bzw. in der Form $re^{j\varphi}$ durch.

4) Berechnen Sie

$\frac{2+3j}{2-3j}$; $\frac{5+2j}{(1+2j)^2}$; $(1 + 2j)^5$; $(-1 + j\sqrt{3})^6$; $(-1 + j\sqrt{3})^{-6}$; $(-1 - j)^4$

5) Berechnen Sie

$[3(\cos 40° + j\sin 40°)][4(\cos 80° + j\sin 80°)]$;

$\frac{2(\cos 15° + j\sin 15°)}{4(\cos 45° + j\sin 45°)}$; $\frac{2(\cos 15° + j\sin 15°)}{4(\cos 45° - j\sin 45°)}$; $\frac{(1+j\sqrt{3})^{10}}{(1-j\sqrt{3})^{10}}$

und stellen Sie das Ergebnis in der Form $r\,e^{j\varphi}$ bzw. a + jb dar.

6) Beweisen Sie , ausgehend von der komplexen Zahl

$\cos 3\varphi + j\sin 3\varphi$ bzw. $(\cos\varphi + j\sin\varphi)^3$

die folgenden Formeln aus der Trigonometrie

$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$; $\sin 3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi$

7) Bestimmen Sie sämtliche Werte von

$(-1 + j\sqrt{3})^{1/2}$ $\quad (-1 - j)^{1/3}$ $\quad (-16 + j16\sqrt{3})^{1/5}$;

geben Sie die Werte sowohl in r,φ-Darstellung als auch in der Form a + jb an. Wo liegen diese Werte in der komplexen Ebene ?

8) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen

a) $z^3 = 12 + 5j$ $\quad$ b) $z^4 = 6 + 8j$ $\quad$ c) $z^5 = 32$

d) $z^2 + (2j - 3)z + 5 - j = 0$

9) In einem Wechselstromkreis seien

a) der Ohmsche Widerstand R und die Induktivität L in Reihe geschaltet ,
b) der Ohmsche Widerstand R und die Kapazität C in Reihe geschaltet ,
c) der Ohmsche Widerstand R und die Induktivität L parallel geschaltet ,
d) der Ohmsche Widerstand R und die Kapazität C parallel geschaltet

Berechnen Sie den komplexen Widerstand Z , den Betrag von Z und $\tan\varphi$; (φ ist der Phasenwinkel).

10) Durch Überlagerung der beiden Schwingungen

$x_1(t) = 4\cos\omega t$ und $x_2(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t + 3\pi/4)$

entsteht eine resultierende Schwingung $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$
Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch A und α.
Welche resultierende Schwingung $y(t) = B\cos(\omega t + \beta)$ entsteht, wenn man die beiden Schwingungen

$y_1(t) = 4\cos(\omega t + \pi/4)$ und $y_2(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi)$
überlagert ?

11) Ermitteln Sie alle Werte von $\ln(1 + j)$
(es sind unendlich viele Werte)
Wo liegen alle diese Werte in der Komplexen Ebene ?
Hinweis: $1 + j$ kann man in der Form $re^{j(\varphi + 2\pi k)}$ $k \in Z$ schreiben.

12) Gegeben sind die komplexen Zahlen

$z_1 = -2 + 2j$ und $z_2 = -1 + j\sqrt{3}$

a) Geben Sie z_1, z_2, $z_1 \cdot z_2^*$, z_1/z_2, $(z_1/z_2)^6$, $(z_1^*/z_2^*)^6$ in r,φ Darstellung an.
Wie groß sind $|(z_1/z_2)^6|$, $|(z_1/z_2^*)^6|$, $|(z_1^*/z_2)^3|$?

b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichungen

$z^3 = 4j$ $\quad z^3 = -4j$ $\quad z^6 = -16$ $\quad (z^3 + 4j)(z^3 - 4j) = 0$

c) Stellen Sie $z = \frac{1}{1+j} + \frac{1}{1+2j} + \frac{1}{1+3j}$ in der Form a + jb dar.

Geben Sie $\frac{1}{z}$ sowie z^* ebenfalls in der Form a + jb an.

Wie groß ist $|z|$?

13) a) Für welche $n \in N$ ist der Realteil bzw. Imaginärteil von $(\sqrt{3} + j)^n$ null ?

b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichungen

$z^3 + 8j = 0$; $\quad z^3 = 8\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^3$; $\quad z^4 + 1 + j\sqrt{3} = 0$

Übungsblatt 2

14) Muster für eine Prüfungsaufgabe

a) Stellen Sie in der Form a + jb. dar:

$$\frac{1}{j}+\frac{1}{1+j}+\frac{1}{1-j} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{2j}{1+2j}+\frac{1+j}{3+j}$$

b) Es sei $\frac{1}{z}=\frac{1}{2+j}+2j$; in welchem Quadranten liegt z ? Geben Sie $|z|$ an.

c) Ermitteln Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen

i) $z = j\, z^*$ ii) $\frac{1}{z}=\frac{1}{z^*}$ iii) $|z-j| = |z^* - j|$

d) Durch Überlagerung der beiden Schwingungen

$$x_1(t) = 4\cos(\omega t) \qquad \text{und} \qquad x_2(t) = 2\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

entsteht eine resultierende Schwingung $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.
Bestimmen Sie graphisch und rechnerisch A und φ.

15) Muster für eine Prüfungsaufgabe

a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = r\, e^{j\varphi}$ an:

$$z_1 = 2 - j\,2\sqrt{3} \qquad z_2 = -\sqrt{3} + j \qquad z_3 = \frac{2}{1+j}$$

b) Berechnen Sie

$$(z_1)(z_2)\ ;\ (z_1)(z_2)(z_3)\ ;\ (z_1)(z_2^*)\ ;\ \frac{z_1}{z_2}\ ;\ (z_1)^3(z_2)^{-3}\ ;\ (z_1)^3(z_2^*)^{-3}\ ;\ \frac{(z_1)^5}{(z_2)^5}\ ;\ (z_3)^{10}$$

c) Berechnen Sie die Beträge der komplexen Zahlen

$$\frac{3+5j}{1+4j}\ ;\ \frac{(3+5j)(1-2j)}{(1+4j)(1+2j)}\ ;\ \frac{4j}{1-3j}+\frac{2}{1+2j}$$

d) In welchen Fällen gilt $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$?

e) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^3 - \frac{3\sqrt{2}}{1-j} = 0$$

f) Vereinfachen Sie

i) $(2e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/3})(2e^{j\pi/2})(2e^{-j\pi/2})$ ii) $2e^{j\pi/3} + 2e^{-j\pi/3} + 2e^{j\pi/2} + 2e^{-j\pi/2}$

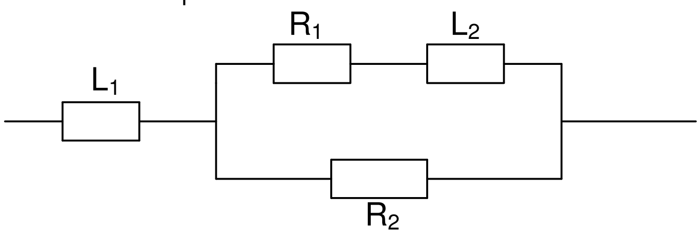
16) Berechnen Sie

a) i) $\left|\dfrac{1+4j}{4+j}\right|$ ii) $\left|\dfrac{z}{z^*}\right|$ iii) $\left|\dfrac{(3+4j)^4}{(3-4j)^3}\right|$

b) i) $(-11-2j)^{1/3}$ ii) $\dfrac{(\sqrt{3}+j)^5}{4j(j-1)^{1/3}}$

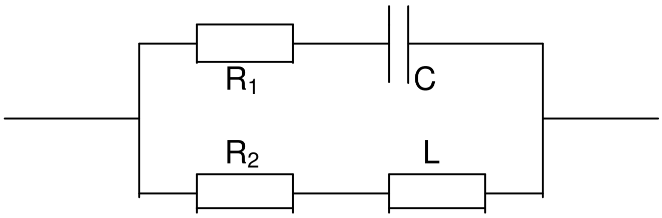
17) Untersuchen Sie die nebenstehenden Wechselstromkreise

a) Geben Sie den komplexen Widerstand Z sowie |Z| an; welches Vorzeichen hat der Phasenwinkel φ ?



b) Z_1 sei der komplexe Widerstand im oberen Zweig, Z_2 der komplexe Widerstand im unteren Zweig. Geben Sie

Z_1 , $|Z_1|$, Z_2 , $|Z_2|$ sowie Z_{ges} und $|Z_{ges}|$ an.



18) Welche z erfüllen die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen. Geben Sie die Lösungsmengen auch graphisch an.

a) $|z-2j| = 2$ b) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \le 1$

c) $z(z^*+2) = 3$ d) $\mathrm{Im}(z^2) = 4$

e) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = 1$ f) $\left|\dfrac{z+3j}{z-j}\right| = 1$

g) $1 < |z+j| \le 2$ h) $\mathrm{Im}\,\dfrac{2z+1}{4z-4} \le 1$

19a) Beweisen Sie, dass gilt : $|e^z| = e^x$; $z = x+jy$

b) Berechnen Sie
i) $e^{3+j\pi}$ ii) $e^{-1+j\pi}$ iii) e^{-j} iv) $e^{-2-j3\pi}$

c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen
i) $e^z = j$ ii) $e^z = -3+4j$

20) Die Gleichung $z^3 = 1$ hat drei Lösungen z_1, z_2, z_3; was ergibt $z_1 + z_2 + z_3$?
Die Gleichung $z^5 = 1$ hat fünf Lösungen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 ;
was ergibt $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$?
Zeigen Sie: $1 + \cos 72° + \cos 144° + \cos 216° + \cos 288° = 0$
$1 + \sin 72° + \sin 144° + \sin 216° + \sin 288° = 0$

Übungsblatt 3

21) Die beiden Gleichungen $z^6 = 1$ und $z^{10} = 1$ besitzen gemeinsame Lösungen; bestimmen Sie diese.

22) Die folgenden Funktionen

$$x_1(t) = 2\sin\omega t\,, \qquad x_2(t) = 2\sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi)\,, \qquad x_3(t) = 2\sin(\omega t + \frac{4}{3}\pi)$$

stellen drei gleichfrequente Schwingungen dar.
Was ergibt $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$?

23) Untersuchen Sie die folgenden komplexwertigen Funktionen der reellen Variablen t ; $z = z(t)$; $z \in \mathbb{C}$; $t \in \mathbb{R}$.
Skizzieren Sie die zugehörigen Ortskurven

a) $z = 1 + j(1 - t)$ b) $z = 1 + t(1 - j)$ c) $z = 1 + e^{jt}$

d) $z = jt + e^{jt}$ e) $z = t + je^{jt}$ f) $z = t + j + e^{j\pi t}$

g) $z = e^{j(1+j)t}$ h) $z = e^{-j(1+j)t}$ i) $z = \frac{1}{1+jt}$

k) $z = \frac{1}{1+j+(1-j)t}$ l) $z = \frac{t}{(1+jt)}$ m) $z = \frac{t+1}{t+j}$

24) Bei einer

i) Reihenschaltung ii) Parallelschaltung

aus einem Ohmschen Widerstand R und einer Induktivität L sei der komplexe Widerstand Z eine Funktion der reellen Variablen ω, d.h. $Z = Z(\omega)$.
Skizzieren Sie die Ortskurven von Z sowie die Ortskurven der komplexen Leitwerte $G = \frac{1}{Z(\omega)}$.

25) Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen die Ableitungen

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ b) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)(x^3 - 2x)$

c) $f(x) = x^2(x^3 + \sin x)$ d) $f(x) = (3x^2 + 1)^5$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-1}$ f) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

g) $f(x) = 3\sin^2 x\cos x$ h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

i) $f(x) = \cos\sqrt{2x+1}$ k) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

l) $f(x) = \ln(\ln x)$ m) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

n) $f(x) = \sqrt{x(x+1)}$

o) $f(x) = (x^2 + 3)(2x^2 - 5) + (x^3 - 1)^2$

p) $f(x) = \dfrac{7x^2 - 6}{x}$

q) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x + 4}$

r) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3 - 9x + 6}$

s) $f(x) = \dfrac{x(3-4x)}{2-3x^2}$

t) $f(x) = \sqrt{1 - 3\sin 2x}$

u) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$

v) $f(x) = \ln\sqrt{1+4x}$

w) $f(x) = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

26) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^2} \qquad x > 0$$

auf Nullstellen, Pole, waagrechte Tangenten, Monotonie, obere bzw. untere Schranken sowie das Verhalten für $x \to \infty$.
Skizzieren Sie den Graph der Funktion.
An welcher Stelle x besitzt die Funktion $g(x) = x \cdot f(x)$ ein relatives Maximum ?

27) Die kinetische Energie eines Körpers der Masse m und der Geschwindigkeit v ist

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

Ein Körper der Masse 1 kg und der Geschwindigkeit v = 30 m/s erfährt eine Beschleunigung von $a = 5\ m/s^2$. Wie groß ist die Änderung der kinetischen Energie pro Sekunde ?

28) Der Schweredruck in der Erdatmosphäre nimmt exponentiell mit der Höhe ab. Für eine „Normatmosphäre“ gilt

$p(h) = a\,e^{-bh}$; $a = 1.01325 \cdot 10^5$ Pa ; $b = 1.256 \cdot 10^{-4}$ /m

In einer Höhe von 1 500 m setzt ein Flugzeug zu einem Steigflug an, bei dem es pro Sekunde 50 m an Höhe gewinnt. Wie groß wäre (ohne Druckausgleich) in diesem Fall die Druckänderung pro Sekunde ?

29) Der schiefe Wurf unter dem Abwurfwinkel α gegen die Horizontale und der Abwurfgeschwindigkeit v_0 besitzt die Parameterdarstellung

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \qquad y(t) = (v_0 \sin\alpha)t - 0.5gt^2$$

Für welches t besitzt die Wurfbahn eine waagrechte Tangente ?
Für welches t gilt für die Kurvensteigung $y' = 0.5\tan\alpha$?

Übungsblatt 4

30) Gegeben seien für $t \geq 0$ die Funktionen f, g, h und k durch

$$f(t) = 3(1-e^{-t/2}) \quad g(t) = 3(1 + e^{-t} - 2e^{-t/2}) \quad h(t) = 3(2t + 1)e^{-t/2} \quad k(t) = \frac{2e^{t/2}}{1+e^{t/2}}$$

a) Bestimmen Sie f(0) , g(0) , h(0) und k(0) .
b) Bestimmen Sie f'(0) , g'(0) , h'(0) und k'(0) .
c) Welche der Funktionen besitzt ein relatives Extremum ?
d) Ermitteln Sie lim f(t) , lim g(t) , lim h(t) und lim k(t) für $t \to \infty$.
e) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.
Verwenden Sie 2 cm für eine Längeneinheit.

31) In der gedämpften Schwingung

$$x(t) = C\, e^{-kt} \sin(\pi t + \pi/6) \qquad t \geq 0$$

sollen die Konstanten C und k so bestimmt werden, daß x(0) = 1 und x(6) = 1/4 gelten (x(0) ist die Anfangsauslenkung).
Wie groß ist die Schwingungsdauer T ?
Ermitteln Sie die Anfangsgeschwindigkeit x(0) .
Für welche t wird x(t) maximal bzw. minimal ?
Wo liegen die Nulldurchgänge ?
Bestimmen Sie x(0)/x(2) bzw. x(2)/x(4)
Allgemein bezeichnet man x(0)/x(T) als Dämpfungsfaktor.

32) Ermitteln Sie für die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = 10e^{-0.5t}\cos t \qquad y(t) = 10e^{-0.5t}\sin t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

- die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
- die Steigungen in diesen Schnittpunkten,
- Punkte mit waagrechten und senkrechten Tangenten.

33) Untersuchen Sie die beiden Funktionen

$$y_1(x) = e^{-0.5x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad y_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4$$

auf Symmetrie, Nullstellen, relative Extremwerte und Wendepunkte.
Wie groß ist bei y_1 bzw. y_2 die Krümmung im Punkt (0,1) ?
An welchen Stellen ist bei y_1 bzw. y_2 die Krümmung null ?

34) Untersuchen und zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 mit

$$f_1(x) = \frac{3}{1+e^{-x^2}} \qquad f_2(x) = \frac{3}{1+(e^{-x})^2}$$

Ermitteln Sie dazu den maximalen Definitionsbereich, eventuelle Nullstellen und Polstellen, Symmetrieeigenschaften, Monotonieverhalten, relative Extrema, sowie das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

35) Beim Zerfall einer radioaktiven Substanz A über eine aktive Tochtersubstanz B in eine stabile Endsubstanz C (Zerfallsreihe $A \to B \to C$) ergeben sich für die jeweiligen Mengen

$N_A(t) = 3\,e^{-t}$ $\quad N_B(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})$ $\quad N_C(t) = 3(1 + e^{-2t} - 2e^{-t})$ $\quad t \geq 0$

Berechnen Sie $N_A(0)$, $N_B(0)$, $N_C(0)$, $\dot{N}_A(0)$, $\dot{N}_B(0)$, $\dot{N}_C(0)$.
Berechnen Sie jeweils den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty}$ für $N_A(t)$, $N_B(t)$, $N_C(t)$.
Für welches t hat der Graph von N_C maximale Steigung ?
Besitzen die Graphen von N_A und N_B bzw. N_A und N_C bzw. N_B und N_C einen Schnittpunkt ? Wenn ja, berechnen Sie diesen Schnittpunkt.
Skizzieren Sie die Graphen von N_A , N_B , N_C .

36) Auf einer horizontalen Unterlage liegt ein Körper mit dem Gewicht $\vec{G}$. Der Körper soll durch eine Kraft $\vec{F}$, deren Richtung mit der Horizontalen einen Winkel α bildet, bewegt werden. Für welchen Winkel α kommt man mit der kleinsten Kraft $|\vec{F}|$ aus ? Der Haftreibungskoeffizient sei μ , die Reibungskraft sei Normalkraft$\cdot\mu$.

37) Bei einem Auto seien die im Zeitraum [0,t] anfallenden Reparatur- und Wartungskosten beschrieben durch $K(t) = 1300\,t^{8/5}$; die Anschaffungskosten für das Auto werden mit 40 000.- DM angesetzt.
Ermitteln Sie die optimale Nutzungsdauer t , d.h. den Zeitpunkt t , für den die Durchschnittskosten

$$\overline{K}(t) = \frac{1}{t}\,(1300\,t^{8/5} + 40\,000)$$

minimal werden.
Wie ändert sich die optimale Nutzungsdauer t, wenn man die Reparaturkosten mit $K(t) = 1300\,(0.2t + t^{8/5})$ ansetzt ?

38) Für den Verkaufspreis p(x) in Abhängigkeit von der verkauften Menge x gelte die folgende Gesetzmäßigkeit

$$p(x) = \frac{1}{1+0.1x^2} \qquad x > 0$$

a) Skizzieren Sie den Graph der Preisfunktion $y = p(x)$.
Für welchen Wert x hat der Graph das größte Gefälle ?
b) Für welchen Wert x wird der Umsatz $U(x) = x\,p(x)$ maximal ?

Übungsblatt 5

39) Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt eine Werbekampagne; dadurch werden die Verkaufszahlen beeinflußt. Es ergibt sich für die im Zeitraum $[0,t]$ verkaufte Stückzahl $V(t) = 1\,000\,000\,(1 - e^{-0.1t})$.
Der Gewinn pro Stück beträgt 20.- DM.
Die Werbekampagne verursacht Fixkosten , die von der Dauer t der Kampagne unabhängig sind (z. B. Kosten für Filmaufnahmen) in Höhe von 50 000.-DM und zusätzliche Kosten von 20 000.- DM pro Tag während der Dauer der Kampagne (z. B. Sendezeiten im Werbefernsehen, Anzeigenkosten in Zeitungen usw.).
Wieviele Tage soll die Kampagne durchgeführt werden, damit der Gewinn maximal wird ?

40) Berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwerte von Obersumme O_n und Untersumme U_n
die Fläche unter der Kurve

a) $y = x^2$ im Intervall $[0,b]$.

Hinweis: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

b) $y = x^3$ im Intervall $[0,b]$.

Hinweis: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

c) $y = e^x$ im Intervall $[0,b]$.

Hinweis: $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$ lineare Näherung für kleine Δx

41) Die Funktionen f_1 und f_2 seien auf $[0,3]$ wie folgt erklärt

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ x - 2 & 2 \le x < 3 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & 1 \le x < 2 \\ x - 1 & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Integralfunktionen $I_1(x)$ und $I_2(x)$. Untersuchen Sie an den Übergangsstellen die Steigungen von I_1 und I_2 .
Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_2 bzw. I_1 und I_2 .

42) Einem Bewegungsvorgang liege der folgende Geschwindigkeitsverlauf zugrunde:

$$v(t) = \begin{cases} t/3 & 0 \le t < 6 \\ 2 & 6 \le t < 8 \\ t/4 & 8 \le t < 12 \end{cases}$$

Skizzieren Sie das v-t Diagramm.
Ermitteln Sie das zu dieser Bewegung gehörige s(t) (Weg-Zeit Gesetz).

Hinweis: es sind Fallunterscheidungen erforderlich.
Wie groß ist im Intervall [0,6] bzw. [0,12] die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$?
Ermitteln Sie die zugehörige Beschleunigung.

43) Einem Bewegungsvorgang liege der folgende Geschwindigkeitsverlauf zugrunde:

$$v(t) = \begin{cases} t/2 & \text{für} \quad 0 \le t < 2 \\ 1 & \text{für} \quad 2 \le t < 4 \\ t/4 & \text{für} \quad 4 \le t < 8 \\ 2 & \text{für} \quad 8 \le t < 12 \\ 8 - t/2 & \text{für} \quad 12 \le t \le 16 \end{cases}$$

Skizzieren Sie das v-t Diagramm.
Ermitteln Sie das zu dieser Bewegung gehörige s(t) (Weg-Zeit Gesetz).
Wie groß ist im Intervall [0,16] die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$?

44) Die zeitlich variable Zuflussmenge in ein Speicherbecken habe die folgende Bauart:

$$m(t) = \begin{cases} t/2 & 0 \le t < 2 \\ 1 & 2 \le t < 4 \\ 3 - t/2 & 4 \le t < 6 \end{cases}$$

Geben Sie die Wassermenge M(t) im Speicherbecken in Abhängigkeit von t an.
(es sind Fallunterscheidungen erforderlich).

$$M(t) = \int_0^t m(t)dt$$

Skizzieren Sie die Graphen von m(t) und M(t) ?
Wie groß ist die mittlere Zuflussmenge $\overline{m}$ im Zeitintervall [0,6] ?
Überlegen Sie insbesondere, welche Bauart M(t) besitzt in den einzelnen Intervallen, in denen m(t) = konst ; m(t) = at + b (lineare Funktion) gilt.
Bemerkung: In der Regelungstechnik nennt man dies ein Integrierglied.

45) Der Stromverlauf i(t) habe die folgende Bauart

$$i(t) = \begin{cases} t & \text{für} \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \le t < 2 \\ 3 - t & \text{für} \quad 2 \le t < 4 \\ -1 & \text{für} \quad 4 \le t < 5 \\ 6 - t & \text{für} \quad 5 \le t \le 6 \end{cases}$$

Ermitteln Sie den zugehörigen Spannungsverlauf u(t) an einer Spule
($u(t) = L\frac{di}{dt}$) und an einem Kondensator ($u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$).
Skizzieren Sie jeweils den Spannungsverlauf u(t).
Verwenden Sie in der Skizze zur Vereinfachung L = 1 und C = 1.

Übungsblatt 6

46) Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration die unbestimmten Integrale

a) $\int e^{-x}\sin x dx$ b) $\int e^{x}\cos x dx$ c) $\int (\sin x)^3 dx$

47) Berechnen Sie mit der Substitutionsmethode die unbestimmten Integrale

a) $\int e^{ax}dx$ b) $\int (ax+b)^4 dx$ c) $\int [\sin(ax+b)]^2 dx$

d) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ e) $\int \cos(\ln x)dx$ f) $\int \cos x(\sin x)^3 dx$

48) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

a) $\int \frac{2x+3}{1+x^2}dx$ b) $\int \tan x dx$ c) $\int \frac{x^2}{x^3+5}dx$

d) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ e) $\int x\sqrt{2x^2-3}\,dx$ f) $\int \frac{2x^2+5x+1}{\sqrt{x}}dx$

g) $\int (x+2)(x^2+4)dx$ h) $\int \frac{5+x}{x}dx$ i) $\int \frac{x^3+2x-3}{x^3}dx$

k) $\int \frac{x}{x+5}dx$ l) $\int \frac{x^2+6x+5}{x+5}dx$ m) $\int \frac{x^2+4x+5}{x+5}dx$

n) $\int \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}dx$ o) $\int \frac{2x}{(1+x^2)(\ln(1+x^2))}dx$ p) $\int \frac{1}{\cos^2 x\tan x}dx$

q) $\int x\sqrt{4-x^2}dx$ r) $\int e^x\sqrt[3]{(1+e^x)^2}dx$ s) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

t) $\int \sin(\ln x)dx$ u) $\int e^{\cos x}\sin x dx$ v) $\int \tan x\ln(\cos x)dx$

49) Bestätigen Sie die folgenden Formeln

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx \qquad n = 1,2,3,...$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx \qquad n = 1,2,3,...$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int \tan^{n-2}dx \qquad n = 1,2,3,...$$

Berechnen Sie damit die Integrale

$\int_0^{\pi/4} \cos^4 x dx$ $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx$ $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx$ $\int_0^{\pi/4} \tan^5 x dx$

50) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

a) $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+25)^3}}dx$ b) $\int \frac{x^3}{3x+5}dx$

c) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$ d) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}dx$

51) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

a) $\int \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx$ b) $\int \frac{x^2+1}{x(x+1)^2}dx$ c) $\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx$

d) $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$ e) $\int \frac{x^4-3x^2+x-1}{x^2-1}dx$

52) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

a) $\int_0^2 |x^2-1|\,dx$ b) $\int_0^4 |(x-1)(x-3)|dx$

c) $\int_0^4 (|x-1|+|x-3|)dx$ e) $\int_0^{2\pi} |e^{-x}\sin x|\,dx$

53) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

a) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \cos^3 x}{1+\sin^3 x}dx$

54) Im Zusammenhang mit Fourierreihen treten die folgenden bestimmten Integrale auf; berechnen Sie diese Integrale (es sind Fallunterscheidungen erforderlich)

$\int_0^{2\pi} (\sin kx)(\sin mx)dx$ $\int_0^{2\pi} (\cos kx)(\cos mx)dx$ $\int_0^{2\pi} (\sin kx)(\cos mx)dx$

Hinweis: Die Integrale lassen sich berechnen

i) über die Formeln $\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}[\cos(k-m)x - \cos(k+m)x]$

$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(k-m)x + \cos(k+m)x]$

ii) über die Formeln $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{jkx} + e^{-jkx})$

$\sin kx = \frac{1}{2}j(e^{-jkx} - e^{jkx})$

Übungsblatt 7

55) Berechnen Sie die Fläche,

i) welche durch die Geraden $x = 0$ und $x = \pi/4$ sowie durch die Kurven $y = \cos x$ und $y = \sin x$ begrenzt wird;

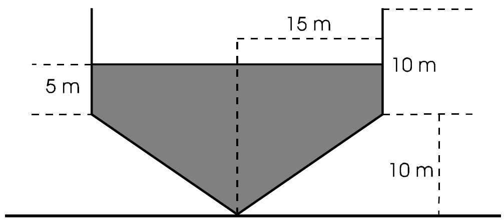
ii) welche durch die Geraden $x = 0$ und $x = \pi/2$ sowie durch die Kurven $y = \cos x$ und $y = \sin x$ begrenzt wird.

56) Die beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2$ und $x^2 + (y-4)^2 = 16$ begrenzen eine Fläche (Skizze , zwei Fälle sind möglich). Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

57) Der Graph der Funktion $f(x) = \cosh x$, die x-Achse, die Geraden $x = 0$ und $x = 1$ begrenzen eine Fläche. Läßt man diese Fläche um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie sein Volumen.

58) Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{5(9-x^2)}$ begrenzt mit der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 3$ eine Fläche. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie sein Volumen.

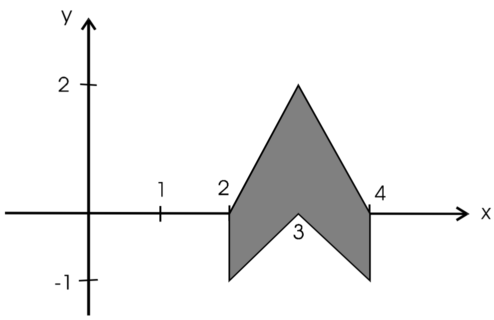
59) Welche Arbeit ist erforderlich, um das Wasser aus dem skizzierten Behälter über den Behälterrand zu pumpen ? Bei dem Behälter handelt es sich um einen Rotationskörper.
Man kann die Aufgabe auf zwei Arten lösen



i) mit Hilfe der ″Körperschwerpunkte″

ii) mit Hilfe von Arbeitsintegralen (man betrachtet die Arbeit, die erforderlich ist, um eine „Scheibe“ über den Behälterrand zu pumpen und summiert dann über alle Scheiben; dann Übergang zum entsprechenden Integral)

60) Lässt man die in der Figur gezeichnete Fläche um die y-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie sein Volumen.

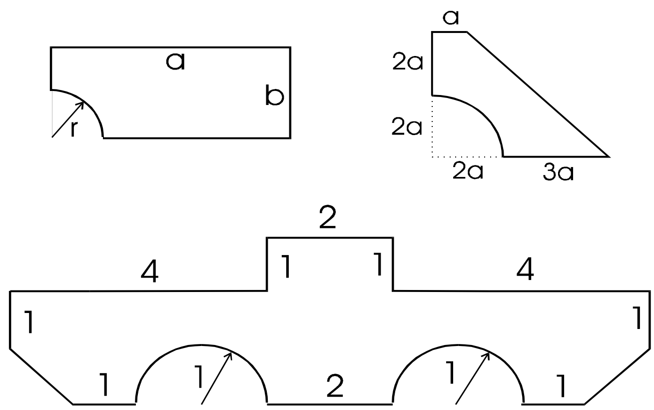


61) Zwischen den Punkten P_1 und P_2 , die sich auf gleicher Höhe befinden und 20 m voneinander entfernt sind, ist eine Kette gespannt. Die Lage und die Form der Kette wird durch die Gleichung

$$y = 10\cosh\frac{x}{10} = 5\,(e^{x/10} + e^{-x/10}) \qquad \text{beschrieben}$$

a) Wie weit hängt die Kette durch und welchen Winkel bilden die Kettenenden mit der Horizontalen ?
b) Wie lang ist die Kette ?
c) Welche horizontalen und vertikalen Kräfte müssen in den Aufhängepunkten aufgenommen werden, wenn die Dichte der Kette $\rho = 7$ kg/m beträgt ?
Hinweis: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

62) Berechnen Sie von den folgenden Flächen die Flächenschwerpunkte mit Hilfe der Guldinschen Regel



63) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen

a) den arithmetischen Mittelwert

i) $f(x) = \sin x - 2\cos x$ in $[0,\pi]$ ii) $g(x) = 1 + e^{-x}$ in $[0,2]$

b) den quadratischen Mittelwert

$h(x) = 1 - x^2/2$ in $[0,1]$

64a) Berechnen Sie die Stammfunktionen zu

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3} \qquad g(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$$

b) Bestimmen Sie Konstanten h und k so, daß gilt

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 h dx \qquad \int_1^e g(x)dx = \int_1^e k dx$$

65) Bestimmen Sie die Konstanten a_1 , a_2 , a_3 und a_4 so, daß gilt

$$\int_0^T a_1\, dt = \int_0^T A \sin(\omega t + \varphi)\, dt \qquad \int_0^{T/2} a_2\, dt = \int_0^{T/2} A \sin(\omega t + \varphi)\, dt$$

$$\int_0^T a_3\, dt = \int_0^T |A \sin(\omega t + \varphi)|\, dt \qquad \int_0^T (a_4)^2\, dt = \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\, dt$$

$A, T, a_1, a_2, a_3, a_4, \in R$, $0 \le \varphi < 2\pi$; $\omega = 2\pi/T$

Übungsblatt 8

66) Berechnen Sie jeweils den **arithmetischen** und den **quadratischen** Mittelwert für

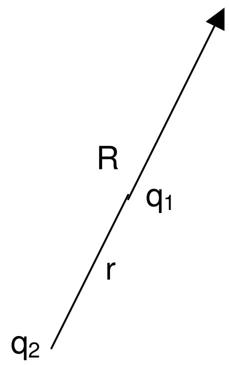
i) $f(x) = 2 - x^2/2$	im Intervall $[0,2]$
ii) $f(x) = 1 - (1/2)\cos x$	im Intervall $[0,\pi]$
iii) $f(x) = A\sin x + B\cos x$	im Intervall $[0,\pi]$

67) Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{5+x}{x^3}dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^\infty ae^{-ax}dx$

68) Eine negative elektrische Punktladung q_1 befinde sich im elektrischen Feld einer positiven Punktladung q_2. Um q_1 im Feld zu bewegen, ist Arbeit erforderlich. Berechnen Sie die Arbeit, die aufzuwenden ist, um die Ladung q_1 aus der Entfernung r in die Entfernung R zu transportieren.
Hinweis: Auf diese Art wird das elektrische Potental erklärt, wenn man für q_1 die Einheitsladung verwendet.

$$F(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{x^2}$$



69) Durch den Graph der Funktion $f(x) = e^{-x/2}$, die x-Achse und die y-Achse wird eine Fläche begrenzt (keine Begrenzung nach rechts).

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt.
b) Läßt man die Fläche um die x-Achse rotieren, entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie sein Volumen.
c) Berechnen Sie die Koordinaten x_s und y_s des Flächenschwerpunktes.

Hinweis: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\, e^{-\frac{x}{2}} \right) = 0$

d) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Rotationskörpers.

70) Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist in (-1,1) definiert.

a) Durch den Graph der Funktion f(x), die x-Achse und die Geraden x = -1 bzw. x = 1 wird eine Fläche begrenzt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt.
b) Läßt man die Fläche um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper. Was kann man über dessen Volumen sagen ?
c) Was ergibt sich hier bei der Berechnung der Koordinate y_s des Flächenschwerpunktes ?

71a) mögliche Prüfungsaufgabe (längere Aufgabe)
Ermitteln Sie die folgenden Stammfunktionen

a) $\int \sqrt{x}(x^2+\frac{1}{x})dx$ b) $\int 2x\sqrt{1+4x^2}dx$ c) $\int \frac{x+3}{(x+2)^4}dx$

d) $\int \frac{2+5e^x}{3e^x}dx$ e) $\int \frac{3\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}dx$ f) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx$ g) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cot x}dx$

b) Ermitteln Sie über eine geeignete Partialbruchzerlegung die Stammfunktionen

$$\int \frac{2x+10}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx \qquad \int \frac{5x+4}{(x-1)(x+2)^2}dx$$

72a) mögliche Prüfungsaufgabe (längere Aufgabe)

Der Graph von $y = \frac{1}{x}$, die x-Achse sowie die Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzen ein Flächenstück. Läßt man die Fläche um die x-Achse rotieren, entsteht ein Rotationskörper.
Skizzieren Sie das Flächenstück.
Berechnen Sie
1.) den Flächeninhalt und den Schwerpunkt des Flächenstücks,
2.) das Volumen und den Schwerpunkt des Rotationskörpers,

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x + \frac{1}{2}x^2)\, e^{-x}$.

1.) Ermitteln Sie eine Stammfunktion.

2.) Berechnen Sie $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ und $\int_{-2}^{\infty} f(x)dx$.

3.) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert von f in den Intervallen
[-2 , 0] ; [-2 , 1] ; [-2 , ∞)

Hinweis als Rechenkontrolle: $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(x+2)^2$

c) Bestimmen Sie a > 0 so, daß gilt $\int_0^a (\frac{1}{4}x^2-1)dx = 0$

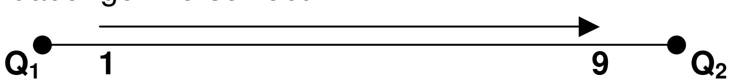
Berechnen Sie $\int_0^2 |\frac{1}{4}x^2-1|\,dx$ und $\int_0^{\sqrt{12}} |\frac{1}{4}x^2-1|\,dx$

d) Berechnen Sie das Arbeitsintegral (Kraft parallel zum Weg) $W = \int_a^b F(x)dx$

für $F(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{(x-10)^2}$ und

i) $a = 1$, $b = 6$ ii) $a = 1$, $b = 9$

Bem.: Derartige Integrale treten auf, wenn man eine Ladung im Feld zweier Punktladungen verschiebt.



Übungsblatt 9

73) Berechnen Sie $\int_1^2 \frac{4}{x}\ln(x^2)dx$

a) exakt,
b) mit Hilfe der Trapez- und Rechteckregel für m = 2 Doppelstreifen,
c) mit Hilfe der Simpson-Formel für m = 1 und m = 2 Doppelstreifen
Schätzen Sie den Fehler bei m = 2 Doppelstreifen ab.
d) Untersuchen Sie jeweils den relativen bzw. prozentualen Fehler
(ist hier möglich, weil man den exakten Wert angeben kann)

74) Berechnen Sie die folgenden Integrale jeweils mit Hilfe der Simpson-Formel

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$; m = 2 Doppelstreifen ; Hinweis: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$; m = 2 Doppelstreifen

c) $\int_{-2}^2 e^{-x^2}dx$; für m = 2 und m = 4 Doppelstreifen.

Schätzen Sie den Fehler bei 4 Doppelstreifen ab.

75) Geben Sie unter Verwendung der aus Tabellen bekannten Reihenentwicklungen für die folgenden elementaren Funktionen die Taylorreihen an.
Wählen Sie als Entwicklungsstelle jeweils $x_0 = 0$.
Geben Sie jeweils den Konvergenzbereich an.

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $g(x) = \cosh x - \cos x$

c) $h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

d) $k(x) = \left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right)\frac{1}{x} - x^2$

76) Geben Sie für die folgenden Funktionen die Taylorentwicklungen bis zu Potenzen 6. Ordnung (Taylorpolynome $T_6(x)$) an; wählen Sie als Entwicklungsstelle jeweils $x_0 = 0$.
Geben Sie jeweils den Konvergenzbereich an.

a) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

b) $g(x) = \frac{x-\sin 3x}{x}$

c) $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$

77) Geben Sie für die folgenden gebrochen-rationalen Funktionen die Taylorentwicklungen bis zu Potenzen 6. Ordnung an. Wählen Sie als Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Geben Sie jeweils den Konvergenzbereich an.
Hinweis: Rechnen Sie ohne Ableitungen; verwenden Sie geometrische Reihen.
Führen Sie bei Bedarf Polynomdivisionen durch.

a) $f(x) = \frac{3}{2+x}$

b) $g(x) = \frac{1}{5+x^2}$

c) $h(x) = \frac{x^3+x}{x^2+2}$

d) $k(x) = \frac{x^3-x^2+x-1}{x+2}$

78) Geben Sie für die folgende Funktion die Taylorentwicklung bis zu Potenzen 4. Ordnung an; wählen Sie als Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorreihen aus der Tabelle und multiplizieren Sie diese systematisch.

79) Ermitteln Sie die Taylorentwicklungen für

a) $f(x) = e^{-x}$; Entwicklungsstelle $x_0 = 1$
Berechnen Sie damit näherungsweise $e^{-1.2}$;
Schätzen Sie den Näherungswert nach oben und nach unten ab.

b) $g(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle $x_0 = \pi/2$

80) Berechnen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung näherungsweise das Integral

$$\int_0^{0.5} \sqrt{(1+x)}dx$$

Verwenden Sie dabei für den Integranden das Taylorpolynom 4. Grades.
Schätzen Sie den Näherungswert nach oben und nach unten ab.

81) Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int_0^1 \frac{1}{5+x^2} xd$ b) $\int_0^{0.5} \frac{x^3+x}{x^2+2}dx$ c) $\int_0^1 \frac{x^3-x^2+x-1}{x+2}dx$

i) exakt mit Hilfe der Stammfunktionen ;
ii) näherungsweise mit Hilfe der in Aufgabe 77 ermittelten Taylorpolynome.
Schätzen Sie den Näherungswert jeweils nach oben und nach unten ab.

82) Berechnen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung näherungsweise die Integrale

a) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$ b) $\int_0^{0.5} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Verwenden Sie dabei
i) für den Integranden in a) das Taylorpolynom 8. Grades;
schätzen Sie den Näherungswert nach oben und nach unten ab.
ii) für den Integranden in b) das Taylorpolynom 6. Grades

83) Lösen Sie die Gleichung

$$e^{0.5x}\left(\frac{x}{2}-1\right) - 1 = 0$$

Ermitteln Sie einen Rohwert x_0
a) grafisch ,
b) rechnerisch mit Hilfe eines geeigneten Taylorpolynoms.
Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung ?

Übungsblatt 10

84) Bestimmen Sie die kleinste positive Lösung der Gleichung

$$\sin x + 1 - \frac{1}{x} = 0$$

Wieviele positive Lösungen besitzt diese Gleichung ?
Besitzt die Gleichung auch negative Lösungen ?
Welches sind für große positive x-Werte näherungsweise die Lösungen ?

85) Bestimmen Sie die kleinste positive Lösung der Gleichung

$$2\cos x - 1 + e^{-x} = 0$$

Ermitteln Sie einen Rohwert x_0
a) grafisch,
b) rechnerisch, indem Sie cosx und e^{-x} durch das jeweilige Taylorpolynom ersetzen.
Wieviele Lösungen besitzt die obige Gleichung ?

86) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin(2x)}{e^x - 2 + e^{-x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x(1-e^{x-3})}{x-3e^{x-3}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(5+x)\ln(1+\frac{5}{x})$ f) $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{\ln(x-1)}-\frac{1}{(x-2)})$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+2x-2)}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^{-x}}{\sin x}-\frac{1}{x})$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+2x^2}}{x+1}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{-3x}-1)\cot x$ i) $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{e^x-e^2})$

Ist der Grenzwert in c) identisch mit dem Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\frac{\sin x}{\tan x})$

87) Nach der Planck'schen Strahlungsformel ist die Energiedichte u eines schwarzen Strahlers bei konstanter Temperatur T nur noch eine Funktion der Frequenz f ; es gilt

$$u(f) = \frac{8hf^3\pi}{c^3(e^{\frac{hf}{kT}}-1)}$$

h : Planck'sche Konstante; k : Boltzmann Konstante; c : Lichtgeschwindigkeit

Berechnen Sie $\lim\limits_{f\to\infty} u(f)$ und $\lim\limits_{f\to 0} u(f)$.

Übungsblatt 11

88) Untersuchen Sie die Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n}$ b) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ c) $a_n = \sqrt[n+1]{10}$ d) $a_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

e) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

89) Es sei $a_n = 1 + \frac{3n+1}{2n+1}$. Berechnen Sie den Grenzwert g der Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und bestimmen Sie danach ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$ gilt.

90) Untersuchen Sie die nachstehend durch ihr allgemeines Glied gegebenen Zahlenfolge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = -2 + 0,5n$, $b_n = -2 + (-1)^n 0,5n$

b) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n}$, $b_n = (-1)^n(\frac{1}{n} - (-1)^{n+1})$

c) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$, $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}$

d) $a_n = (1+\frac{2}{n})^{100}$, $b_n = (1+\frac{3}{n})^{2n}$, $c_n = (1-\frac{1}{3n})^{2n}$, $d_n = (1+\frac{4}{n-1})^{n+4}$

e) $a_n = \frac{3^n+6^n}{3^n+6^{n+1}}$, $b_n = \frac{3^n+(-3)^n}{3^{n+1}}$

91) Berechnen Sie die Glieder a_8 und a_{100} der arithmetischen Folge:
$a_5 = 22, d = -2$.

92) Berechnen Sie die Glieder der endlichen geometrischen Folge $b_1,\dots,b_6$ mit $b_3 = 2, b_5 = 8$.

93) Schreiben Sie mit Summenzeichen und berechnen Sie:

a) $(37^3-36^3)+(35^3-34^3)+\dots+(3^3-2^3)+1-3(36^2+34^2+\dots+2^2)$

b) Summe aller ungeraden Zahlen von 7 bis 213

c) $3^{-37}-3^{-36}+3^{-35}-3^{-34}+\dots+3^{-3}-3^{-2}+3(2^{36}+2^{34}+\dots+2^2)$

d) $3+2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\frac{32}{81}+\dots$

94) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Zahlenreihe $2-\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}-\frac{2}{a^3}+\frac{2}{a^4}-+\ldots$ konvergent ?
Geben Sie für den Fall der Konvergenz den Grenzwert in Abhängigkeit von a an.

95) Berechnen Sie den Grenzwert (falls er existiert) nachstehender Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n = n\cdot(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1})$

b) $a_n = n\cdot(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}})$

c) $a_n = \left(\frac{(1-\frac{2}{n})(n+3)}{n+2}\right)^n$

d) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$ Hinweis: binomische Formel

e) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

f) $a_n = \frac{2}{n}\cdot\sin(\frac{2}{n})$

g) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$

h) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

i) $a_n = \sqrt{n}\cdot\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

j) $a_n = \sin\frac{1}{n}-n\cdot\cos\frac{1}{n}$

k) $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ Hinweis: Partialbruchzerlegung

96) Stellen Sie eine Vermutung für die explizite Darstellung des n-ten Folgengliedes auf.

a) $a_1 = 7,\ a_{n+1} = a_n + 2$

b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5\cdot a_n$

97) Geben Sie eine möglichst einfache Rekursionsvorschrift für die nachfolgenden n-ten Folgeglieder:

a) $a_n = n^2 + n - 2$

b) $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$

98) Folgende Grenzwerte von Folgen werden als bekannt vorausgesetzt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \quad \forall c > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ , \qquad \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Unter Zuhilfenahme dieser Grenzwerte berechne man:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n} \sqrt[n]{n+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[3]{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n^2} + 2n)^2}{6n^2 + 15}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n!}{5^{(n+1)!}} + \frac{3^n}{(n+1)!})$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{n}(1 + \frac{1}{n+1})^n}{\sqrt[n]{3} + 0{,}4^{n^2}}$

99) Schreiben Sie $2{,}3\overline{45}$ als Bruch.

100) Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{n} a_n$.

a) Bestimmen Sie die ersten 5 Folgenglieder und dann eine explizite Beschreibung von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

101) Die Folge $\{b_n\}$ mit b_0 und $b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 1}{b_n + 2}$ habe den Grenzwert g.

Bestimmen Sie g.

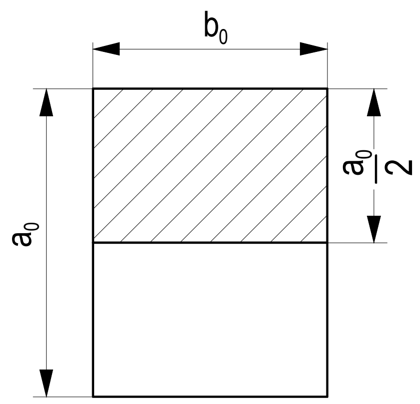
102) Haben Sie sich auch schon gefragt, warum wir eigentlich meist auf A4-Blättern schreiben ? Papier könnte ja irgend ein beliebiges Format haben. Aber unser Papier ist eben meist DIN A4, also 21,0 x 29,7 cm groß.

Früher war das nicht so. Jede Person, die Papier herstellte, schnitt es irgendwie zu, gerade so, wie es ihr passte. Diese Tatsache bereitete vielen Leuten Mühe, etwa den Sekretärinnen, deren Briefpapiere nie in irgendwelchen Kuvert Platz fanden.

Einige praktische Köpfe nahmen sich deshalb vor, ein für allemal aufzuräumen mit diesem Papierdurcheinander. Man erfand die DIN-Norm (DIN=Deutsche Industrie Norm). Darin wurde festgelegt, in welchen Größen die Papierbögen herzustellen und zu gebrauchen sind. Zuerst wurde das größte Papierformat festgelegt. Man nannte es „Weltformat“ und definierte folgendes:
Seine Fläche beträgt $1\,\text{m}^2$, sein Seitenverhältnis betragt $1:\sqrt{2}$.

Das Weltformat heißt auch A0. Die weiteren Formate wurden wie folgt festgelegt:

(i) Das Papierformat A1 erhält man, indem man ein A0 Blatt so faltet, dass seine Breitseiten aufeinander zu liegen kommen.
(ii) Auf dieselbe Weise – durch wiederholtes Falten – erhält man die weiteren Papierformate der DIN-A-Reihe.



DIN Format

Bei genauer Betrachtung fällt natürlich sofort die Ähnlichkeit zur Rekursion ins Auge. Die Papierformate sind rekursiv definiert !

a) Finden Sie heraus, wie gross so ein Bogen im Weltformat ist, also seine Länge und Breite.

b) Es sei a_i die Länge und b_i die Breite des Formats Ai (i=0,1,2,...).
Die Längen, bzw. Breiten der Formate DIN Ai bilden eine Folge $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ bzw. $\{b_i\}_{i=0}^{n}$.
Geben Sie eine Rekursionsvorschrift für diese Folgen an.

c) Drücken Sie $a_1,...,a_n$ durch a_0 und $b_1,...,b_n$ durch b_0 aus, d.h. geben Sie eine explizite Darstellung der Folgen $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ und $\{b_i\}_{i=0}^{n}$ an.
Was für Folgen liegen vor ?

103) a) Fünf Jahre lang werden am Jahresanfang 200 € zu 4% Zinsen eingezahlt. Zu welchem Betrag wächst das Kapital an ?

b) Wieviele Jahre lang muss man jährlich je 500 € zu 4,5% Zinsen anlegen, um ein Kapital von 10.000 € anzusparen ?

104) Eine Stahlkugel fällt aus 50 cm Höhe auf eine Stahlplatte, prallt zurück, fällt wieder nach unten usw.. Nach jedem Aufprall erreicht die Kugel noch 85% ihrer vorigen Höhe. Wie groß sind die von der Kugel erreichten Höhen zusammen ?

105) Zum Test der Bauchspeicheldrüse wird in diese 0,2 g eines Farbstoffs gespritzt und dessen Ausscheidung gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse scheidet in jeder Minute 4% des noch vorhandenen Farbstoffes aus. Dabei sei f_n der nach n Minuten noch vorhandene Farbstoff (in g) in der Bauchspeicheldrüse.

a) Geben Sie eine explizite und eine rekursive Darstellung der Folge $\{f_n\}$ an.
b) Zeigen Sie, dass die Folge $\{f_n\}$ streng monoton fällt und nach unten beschränkt ist.
c) Ist eine Bauchspeicheldrüse gesund, wenn nach 40 min noch 0,1 g des Farbstoffs vorhanden ist ?

106) Es sei $\{f_n\}$ eine Folge, deren Folgenglieder wie folgt gegeben sind:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1+\frac{1}{1},\ f_3 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},\ f_4 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}},\ f_5 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}},...$$

a) Geben Sie für diese Folge $\{f_n\}$ eine Rekursionsvorschrift an.
b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \tau$

$$\tau = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}$$

Hinweis: τ nennt man einen Kettenbruch. Er ist der einfachste – und damit vielleicht auch der schönste – Kettenbruch, den man sich vorstellen kann, der aus lauter Einsen besteht. τ ist hierbei die Goldene Schnittzahl.

107) Betrachten Sie die Rekursion $w_{n+1} = \sqrt{1+w_n}, \quad w_0 = 0$.
Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\{w_n\}$, d.h.

$$\tau = \lim_{n\to\infty} w_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}$$

Hinweis: τ ist auch hierbei die Goldene Schnittzahl und kann durch eine Kettenwurzel dargestellt werden.

108) Betrachten Sie folgende Folge, deren Glieder rekursiv gegeben sind:

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + \frac{p}{a_k}), \quad a_1 = p, \quad p > 0.$$

a) Zeigen Sie dass die Folge $\{a_k\}$ nach unten beschränkt ist und monoton abnimmt.
b) Nachdem Sie wissen, dass die Folge konvergiert, zeigen Sie, dass ihr Grenzwert den Wert $\sqrt{p}$ besitzt.

Hinweis: Die Folge kann dazu genommen werden, um $\sqrt{p}$ näherungsweise zu berechnen. Das Verfahren nennt sich „Babylonisches Wurzelziehen“. Manchmal wird es auch nach Heron benannt.

Übungsblatt 12

109) Welche der Reihen sind geometrische Reihen ?
Welche der geometrischen Reihen sind konvergent ?
Geben Sie den Grenzwert der konvergenten geometrischen Reihen an:

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{5^{k-1}}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}(1+2^k)$ c) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5}{3^{k^2}}$ d) $\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2k}$ e) $\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{4}(\frac{5}{3})^{k-2}$

110) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ mit folgenden allgemeinen Gliedern a_k auf Konvergenz:

a) $a_k=\frac{\cos k\pi}{k}$ b) $a_k=\frac{3^k k!}{k^k}$ c) $a_k=\frac{2^k k!}{k^k}$ d) $a_k=\frac{k+1}{k^2}$ e) $a_k=(-1)^k\cdot\frac{k+1}{k^2}$

111) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen:
Geben Sie jeweils den Konvergenzbereich an.

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{k!}x^k$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2}x^k$ c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{2^k}{k}(x-1)^k$ d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)!}{k^k}(x+1)^k$

112) Wie lautet die Potenzreihenentwicklung um $x_0=0$ der folgenden Funktionen (allgemeines Glied, Konvergenzradius) ?

a) $\frac{1}{1+x^2}$ b) $\frac{2}{2+x}$ c) $\sin(\frac{x}{2})$ c) $e^{-x^2/2}$ d) $(e^{-x})^2$

113) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung mit Entwicklungspunkt $x_0=0$ bis zur Potenz x^6; geben Sie das Konvergenzintervall an.

a) $2\sin x\cos x$ b) $\frac{\sin x}{1-x}$ c) $\frac{\cos x}{e^x}$ d) $\frac{e^x}{\cos x}$ e) $\ln\frac{1+x}{1-x}$ f) $\cosh x$
g) $\frac{\ln(1+x)}{1-x^2}$

114) Entwickeln Sie $f(x)=\sqrt{1+x}$ nach dem Satz von Taylor bis zur Potenz x^5 (Entwicklungspunkt $x_0=0$). Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Binomialreihe für $a=\frac{1}{2}$.

115) Schreiben Sie das Polynom $p_4(x)=x^4+3x^3+x^2+2x+1$ mit Hilfe des Satzes von Taylor um in die Form

$p_4(x)=(x-1)^4+a_3(x-1)^3+a_2(x-1)^2+a_1(x-1)+a_0$
(“Umentwicklung des Polynoms um den Punkt $x_0=1$“)

116) Geben Sie Potenzreihenentwicklung von f(x)=sin(x) mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$ an

a) Mit Hilfe des Satzes von Taylor
b) Mit Hilfe der bekannten Reihe für sin(x) und einer geeigneten Substitution.

117) Berechnen Sie ln2 mit Hilfe der Potenzreihe von ln(1+x). Wie groß muss der Grad des Taylor-Polynoms mindestens gewählt werden, damit das Ergebnis auf zwei Dezimalstellen hinter dem Dezimalpunkt genau ist ?

118) Bestimmen Sie die Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 bis zur 4. Potenz:

a) $\sqrt{4+5x};\ x_0 = 0$ b) $\sqrt{x};\ x_0 = 1$

119) Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe (bis x^6):

a) $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ b) $\int\limits_0^x \frac{dt}{\cos t}$ c) $\int\limits_0^x \frac{1}{t}\ln\frac{1}{1-t}\,dt$

120) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale näherungsweise mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Integranden (Fehler kleiner als 0.001):

a) $\int\limits_0^{0,4} \sqrt{1+x^4}\,dx$ b) $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx$ c) $\int\limits_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

121) Berechnen Sie die Grenzwerte mit Hilfe von Potenzreihenentwicklung:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x})$

122) Berechnen Sie die Eulersche Zahl e auf sechs Stellen genau!

123) Berechnen Sie Sinus von 10^0 auf sechs Dezimalstellen genau mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion.

124) Gegeben sei die Funktion

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$$

Entwickeln Sie f in eine Potenzreihe (Taylorreihe um $x_0 = 0$) unter Verwendung der Binomialreihe. Wie lautet das Näherungspolynom, wenn die Entwicklung nach dem 3ten Glied abgebrochen wird ?

125) Die Energie eines „relativistischen“ Teilchens der Masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

beträgt $E = mc^2$, wobei m_0 die Ruhemasse, v die Geschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Die kinetische Energie ist $E_{kin} = mc^2 - m_0c^2$.
Ermitteln Sie eine Näherungsformel für die kinetische Energie in erster Näherung.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die bekannte Potenzreihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(-x^2)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^k} x^{2k} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + ..., \quad -1 < x < 1.$$

mit einer geeigneten Substitution für x.

126) Die Standardnormalverteilung der Gauß'schen Normalverteilung, die eine der wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschreibt, ist definiert über

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

wobei das Integral nicht elementar berechenbar ist.
Stellen Sie die Funktion $\Phi(x)$ durch eine Potenzreihe dar.