I) MATRIZEN

Motivation:

1) Speichern geometrischer Daten: Punkte, Vektoren.

2) Lineare Gleichungen

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

....

Koeffizienten

a_{ij} i - te Gleichung (Zeile), $i = 1, 2, 3, ..., m$

j - te Variable (Spalte) , $j = 1, 2, 3, ..., n$

Definition m x n Matrix

Matrix mit m Zeilen und n Spalten = Zahlenschema

$$\underline{A}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ik} \in \mathbb{R}$$

Praxisanwendungen:

1) Lösen von linearen Gleichungssystemen
2) Geometrische Transformationen

Der Formalismus:

$$\underline{y} = \underline{A} * \underline{x}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{(m,1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{(m,n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

Beispiele von Matrizen

Beispiel 1: Schnitt zweier Ebenen

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$-3x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: spezielle Matrizen

a) Die Einheitsmatrix

$$\underline{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

b) Die Nullmatrix

$$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(m,n)}$$

c) Reelle Zahlen $r \in \mathbb{R}$ als 1x1 Matrizen

$$(r)_{(1,1)}$$

Rechnenregeln

1) Gleichheit

$$\underline{A}_{m,n} = \underline{B}_{p,q} \Leftrightarrow m = p \wedge n = q \wedge a_{ij} = b_{ij} \; \forall \, i, j$$

2) Multiplikation mit einem Skalar

$$s \in \mathbb{R}, \; \underline{A}_{m,n}$$

$$s \cdot \underline{A}_{m,n} = s \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sa_{11} & \cdots & sa_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{m1} & \cdots & sa_{mn} \end{pmatrix}$$

Für $s = -1$

$$(-1)\underline{\underline{A}}_{m,n} = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

(1) $s\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}s$
(2) $p(q\underline{\underline{A}}) = (pq)\underline{\underline{A}}$
(3) $0\underline{\underline{A}} = O_{m,n}$ Nullmatrix

3) Die Addition / Subtraktion:
funktioniert nur wenn beide Matrizen die gleiche Anzahl Zeilen und Spalten haben.

$$\underline{C}_{m,n} = \underline{A}_{m,n} + \underline{B}_{m,n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Elementweise Addition:

Subtraktion:

$$\underline{A}_{m,n} - \underline{B}_{m,n} = \underline{A} + (-1)\underline{B} = \left(a_{ij} - b_{ij}\right)_{m,n}$$

Rechenregeln:

$$\underline{A}+\underline{B}=\underline{B}+\underline{A}$$
$$\left(\underline{A}+\underline{B}\right)+\underline{C}=\underline{A}+\left(\underline{B}+\underline{C}\right)$$
$$\underline{A}+0=\underline{A}$$
$$\underline{A}+\left(-\underline{A}\right)=0$$

$$1\cdot\underline{A}=\underline{A}$$
$$p\left(\underline{A}+\underline{B}\right)=p\underline{A}+p\underline{B}$$
$$\left(p+q\right)\underline{A}=p\underline{A}+q\underline{A}$$

Bemerkung:

Diese formalen Regeln der Operationen mit Matrizen sind ähnlich wie die entsprechenden Regeln der Vektorrechnung.

Deshalb können Matrizen im abstrakten Sinne auch als "Vektoren" eines abstrakten 'Vektorraumes' aufgefaßt werden .

4) Die Multiplikation von Matrizen

$$\underline{C}_{m,n} = \underline{A}_{m,k} \cdot \underline{C}_{k,n}$$

wobei

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} \cdot b_{pj}$$

d.h. das Element c_{ij} der Produktmatrix ist das Skalarprodukt der Zeile i von $\underline{A}$ mit der Spalte j von $\underline{B}$.

Das Falk Schema

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}5 & 2 & -6\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix} = \underline{B} \\ \hline \underline{A} = \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}11 & 4 & -9\\ 22 & 12 & -26\end{pmatrix} = \underline{C}\end{array}$$

Beispiele für die Matrixmultiplikation

1) Produkt möglich
2) Produkt nicht möglich
3) Quadratische Matrizen
4) Reihenfolge

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \; \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5) Nullteiler

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6) Potenzen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \underline{A}^n = ? \qquad (\, a_{13}^{\,n} = n \,)$$

7) Symmetrische Matrizen

8) $a_{ij} = f(i, j)$

Rechenregeln

1) $(\lambda \underline{A})\underline{B} = \underline{A}(\lambda \underline{B}) = \lambda(\underline{A}\,\underline{B})$.
2) $\underline{A}\,\underline{B} \neq \underline{B}\,\underline{A}$
3) $(\underline{A}\,\underline{B})\underline{C} = \underline{A}(\underline{B}\,\underline{C}) = \underline{A}\,\underline{B}\underline{C}$
4) $\underline{A}(\underline{B}+\underline{C}) = \underline{A}\,\underline{B} + \underline{A}\,\underline{C}$
5) $\underline{A}\,\underline{E} = \underline{E}\,\underline{A} = \underline{A}, \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Hausaufgabe: Aufg. 6,8,10-13,16 BzM 2

Transponieren

Definition: Zeilen mit Spalten vertauschen

$$\underline{A} = \left(a_{ij}\right) \Rightarrow \underline{A}^T = \underline{A}' = \left(a_{ji}\right)$$

Rechenregeln

1) $(\underline{A}+\underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$
2) $\left(\underline{A}^T\right)^T = \underline{A}$ 3) $\left(\underline{A}\underline{B}\right)^T = \underline{B}^T\,\underline{A}^T$

Anwendung der Matrixmultiplikation bei linearen Abbildungen

Definition:

Lineare Abbildungen $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind definiert als

$$\underline{y} = L(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{x}$$

wobei $\underline{A}$ eine 2x2 Matrix ist und $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$.

Beispiele

Geometrische Transformationen der Ebene wie Rotationen, Spiegelungen, Streckungen usw. werden durch lineare Abbildungen $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ beschrieben.

Spiegelungen

an der x-Achse haben als Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rotationen

um den Ursprung $O(0\,|\,0)$ mit Drehwinkel φ

haben die Drehmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Bei der Verkettung von geometrischen Trafos werden die Matrizen multipliziert.

Beispiel

Gegeben sind $A(0\,|\,0)$, $B(0\,|\,1), C(1\,|\,1)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks ABC nach:

a) einer Rotation um $O(0\,|\,0)$ mit $\varphi = \pi / 4$.
b) einer Spiegelung an der x-Achse.
c) der Rotation a) gefolgt von der Spiegelung b).
d) Trafo b) gefolgt von a).

II) DETERMINANTEN

Definition $\underline{A} = \left(a_{i,j}\right), 1 \le i, j \le n.$

Entwicklung nach der Zeile i:

$$\det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} U_{i,j}$$

Entwicklung nach der Spalte j:

$$\det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} U_{i,j}$$

wobei $U_{i,j}$ die Unterdeterminante ist, in der die Zeile i und die Spalte j entfernt wurden.

Bemerkungen

1) ‚Rekursive' Definition (n=2, 3, ...)
2) Sarrusregel als Alternative nur für n=3.
3) Schachbrettregel für die Vorzeichen

Beispiele:

1)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Entwicklung nach der 2. Zeile. Ergebnis = 4.

2) BzM 2: Aufgaben 20a, 18b, 19c
3)

Satz: $\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det(\underline{A}) \cdot \det(\underline{B})$

Hausaufgabe: BzM 2, Aufg. 20b, 18c, 22, 23

III) DIE INVERSE MATRIX

Definition: $\underline{A} \cdot inv(\underline{A}) = inv(\underline{A}) \cdot \underline{A} = \underline{E}$

Bezeichnung: $inv(\underline{A}) = \underline{A}^{-1}$

Satz: Wenn $\underline{A}$ eine quadratische Matrix ist und $\det(\underline{A}) \neq 0$, dann ist die Matrix invertierbar.

Bemerkung:
Matrizen mit der Eigenschaft $\det(\underline{A}) \neq 0$ werden reguläre Matrizen genannt; wenn $\det(\underline{A}) = 0$ ist die Matrix singulär und nicht invertierbar.

Die Berechnung der Inversen für 2x2 Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \underline{A}^{-1} = ?$$

Beispiel

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = ?$$

Lösung:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ x + 3z & y + 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \ z = \ 1 \\ 2y - \ t = \ 0 \\ x + 3z \ = \ 0 \\ y + 3t \ = \ 1 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} x = \ 3/7 \\ y = \ 1/7 \\ z = -1/7 \\ t = \ 2/7 \end{cases}$$

Ergebnis:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{E}$$

Berechnung der Inversen für 2x2 Matrizen:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Berechnung der Inversen für nxn Matrizen mit dem Gauß Algorithmus * (optional)

Verfahren:

$$\left(\underline{A} \,\vdots\, \underline{E}\right) \sim \cdots \sim \left(\underline{E} \,\vdots\, inv(\underline{A})\right)$$

Beispiel* (optional):

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \underline{A}^{-1} = ?$$

Die Zeilenoperationen sind in den eckigen Klammern angegeben.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim [Z3 \to 5Z1 - 2Z3]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim [Z3 \to 2Z3 - Z2]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} Z1 - Z3 \\ Z2 + Z3 \\ (-1)Z3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 11 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} Z2 \to Z2/2 \\ Z1 \to Z1 - Z2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 16 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim [Z1 \to Z1/2]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Ergebnis:

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Probe: $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{E}$

Rechenregeln

1) $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{E}$
2) $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$
3) $\left(\underline{A}\,\underline{B}\right)^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
4) $\left(\underline{A}^{-1}\right)^{T} = \left(\underline{A}^{T}\right)^{-1}$
5) $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$
6) $\underline{x}\,\underline{A} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x} = \underline{b}\,\underline{A}^{-1}$
7)* $\underline{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det\left(\underline{A}\right)}\left(\underline{A}^{*}\right)^{T}$

Anwendungen der Inversen

1) Lösen von LGS
2) Lösen von Matrixgleichungen
3) Berechnung von geometrischen Transformationen.

Hausaufgabe: Aufg. 36, 37, 46

IV) LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME (LGS)

Definition:

LGS mit m Gleichungen, n Unbekannten x_k , $k = 1, 2, \ldots n$ und Koeffizienten a_{ik}, b_i : $i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots n$:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{A} = m \times n \text{ Matrix}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \ \underline{b} \in \mathbb{R}^m$$

§1. Die Lösung durch Gauß Elimination

Durch *elementare Umformungen* der erweiterte Systemmatrix $\overline{A} = (\underline{A} \ \underline{b})$ wird die Systemmatrix $\underline{A}$ auf eine *Dreiecks- oder Trapezform* gebracht (je nach Dimension). Das zugehörige äquivalente *gestaffelte* System ist durch Substitutionen leicht lösbar.

Elementare Umformungen sind lineare Kombinationen von Zeilen der Matrix $\overline{A} = (\underline{A} \ \underline{b})$. Sie werden mit dem Symbol ~ bezeichnet. Spaltentausch ist auch zulässig.

Beispiel 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Lösung:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 7 \\ 5 & 2 & -3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim [Z3 \to 5Z1 - 2Z3]$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \sim [Z3 \to 2Z3 - Z2]$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Das entsprechende *gestaffelte System* ist von ’unten nach oben’ lösbar:

$$\Rightarrow x_3 = 3$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(7 - x_3) = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(1 - x_2 + x_3) = 1$$

<u>Beispiel 2:</u>

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 - 7x_4 = 2 \end{cases}$$

<u>Lösung:</u>

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & -7 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 15 & -6 & 8 \\ 0 & 11 & 15 & -22 & 4 \\ 0 & 17 & 25 & -37 & 8 \end{array}\right) \sim [S2 \leftrightarrow S3]$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -4 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 15 & 7 & -6 & 8 \\ 0 & 15 & 11 & -22 & 4 \\ 0 & 25 & 17 & -37 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -4 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 15 & 7 & -6 & 8 \\ 0 & 15 & 11 & -22 & 4 \\ 0 & 75 & 51 & -111 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -4 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 15 & 7 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 0 & 0 & 16 & -81 & -16 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -4 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 15 & 7 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -81 & -16 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -4 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 15 & 7 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & 0 \end{array}\right).$$

Das entsprechende *gestaffelte System*:

$$\Rightarrow x_4 = 0$$
$$\Rightarrow x_2 = -1$$
(siehe Spaltentausch)
$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{15}(8 - 7x_2) = \frac{15}{15} = 1$$
$$\Rightarrow x_1 = -1 + 4x_3 + 2x_2 = 1.$$

Beispiel 3:

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & \vdots & 1 \\ 3 & -4 & 5 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 14 & -7 & \vdots & -2 \\ 0 & 14 & -7 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 14 & -7 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = 1 \quad !$$

Das System führt zu einem Widerspruch und ist somit nicht lösbar.

<u>Beispiel 4:</u>

$$\begin{cases} x_1 \quad 8x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

<u>Lösung:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & -28 & 14 & -2 \\ 0 & -14 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 14 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das System ist unterbestimmt und durch Einführung eines Parameters lösbar:

$$x_3 = t \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{14}(1 + 7t) \Rightarrow$$

$$x_1 = 1 - 8 \cdot \frac{1}{14}(1 + 7t) + 3t = \frac{3}{7} - t$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 - t \\ (1+7t)/14 \\ t \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 1/14 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Das System hat somit ∞ Lösungen, die auf einer Gerade liegen.

Beispiel 5:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 9 \end{cases}$$

Lösung:

Das System ist überbestimmt.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & \vdots & 5 \\ 1 & 2 & \vdots & 4 \\ 2 & -3 & \vdots & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & \vdots & 5 \\ 0 & 7 & \vdots & -1 \\ 0 & 7 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & \vdots & 5 \\ 0 & 7 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist:

$$x_2 = -\frac{1}{7} \Rightarrow x_1 = 5 - \frac{5}{7} = \frac{30}{7}.$$

§2. Rang einer Matrix

Definition: Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix ist die maximale Anzahl seiner linear unabhängigen Zeilen.

Satz :

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der von $\boxed{0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0}$ verschiedenen Zeilen nach der Gaußelimination.

Beispiele:

1) rang($\underline{A}$) =rang($\overline{A}$)=3
2) rang($\underline{A}$) =rang($\overline{A}$)=4
3) rang($\underline{A}$) =2; rang($\overline{A}$)=3
4) rang($\underline{A}$) =rang($\overline{A}$)=2
5) rang($\underline{A}$) =rang($\overline{A}$)=2

Hauptsatz der Linearen Algebra:

Das LGS $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist lösbar genau wenn

rang($\underline{A}$) =rang($\overline{A}$)

Die Lösungsalternativen:

$\underline{A}$ sei eine $m \times n$ Matrix und r der rang von $\underline{A}$

1) Wenn $\underline{A}$ quadratisch ist und wenn gilt rang($\underline{A}$)=dim($\underline{A}$)=n, dann liegt eine eindeutige Lösung vor.
2) Wenn r=rang($\underline{A}$) =rang($\overline{A}$) $< m$, dann liegt eine $(m-r)$- parametrige Lösungsschar vor.
3) Wenn rang($\underline{A}$) $\neq$ rang($\overline{A}$), dann ist das System nicht lösbar.

§3. Systeme mit Parameter

Beispiel 6:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + p \cdot x_3 = 1 \\ x_1 + p \cdot x_2 + x_3 = p \quad , \quad p \in \mathbb{R} \\ px_1 + x_2 + x_3 = p^2 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & p & \vdots & 1 \\ 1 & p & 1 & \vdots & p \\ p & 1 & 1 & \vdots & p^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & \vdots & 1 \\ 0 & p-1 & 1-p & \vdots & p-1 \\ 0 & 1-p & 1-p^2 & \vdots & p^2-p \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & \vdots & 1 \\ 0 & p-1 & 1-p & \vdots & p-1 \\ 0 & 0 & 2-p-p^2 & \vdots & p^2-1 \end{pmatrix}$$

Fallunterscheidung nach $p \in \mathbb{R}$:

1) Für $p \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$:

$$\Rightarrow x_3 = \frac{p^2-1}{2-p-p^2} = -\frac{(p-1)(p+1)}{(p-1)(p+2)}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{p+1}{p+2}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{p-1}\left[p-1-(p-1)\frac{p+1}{p+2}\right]$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{p+2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - \frac{1}{p+2} + p\,\frac{p+1}{p+2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{p^2+2p+1}{p+2}$$

1) Für $p = -2$:

$$\underline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & 1 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-1 \\ 0 & 0 & 2-p-p^2 & p^2-1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Und somit ist das System nicht lösbar (Widerspruch).

2) Für $p = 1$:

$$\underline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & p & \vdots\ 1 \\ 0 & p-1 & 1-p & \vdots\ p-1 \\ 0 & 0 & 2-p-p^2 & \vdots\ p^2-1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \vdots\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots\ 0 \end{array}\right)$$

Das System besitzt eine 2 –parametrige Lösungsschar:

$x_3 = s,$

$x_2 = t,$

$\Rightarrow x_1 = 1 - s - t$

Die Lösungen liegen in der Ebene:

$$\vec{x} = \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1-s-t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; s,t \in \mathbb{R}$$

§4. Die Cramerregel

Es sei $\underline{A}$ eine 3×3 Matrix mit den Spaltenvektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$:

$$\underline{A} = \left(\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \underline{a}_3 \right),$$

und $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ein lineares Gleichungssystem.

Das System $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist eindeutig lösbar genau wenn $\det(\underline{A}) \neq 0$.

Die Lösung ist:

$$x_1 = \frac{\det\left(\underline{b}\ \ \underline{a}_2\ \ \underline{a}_3\right)}{\det(\underline{A})}$$

$$x_2 = \frac{\det\left(\underline{a}_1\ \ \underline{b}\ \ \underline{a}_3\right)}{\det(\underline{A})}$$

$$x_3 = \frac{\det\left(\underline{a}_1\ \ \underline{a}_2\ \ \underline{b}\ \right)}{\det(\underline{A})}$$

<u>Beispiel 6:</u> Lösung mit Cramerregel

<u>§5 Homogene Systeme</u>

<u>Definition:</u>

1) Das System $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$
wird *homogenes* System genannt.
2) Die Lösung $\underline{x} = \underline{0}$ wird *triviale* Lösung gemannt.

<u>Satz:</u> Ein homogenes System $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ mit quadratischer Matrix $\underline{A}$ hat nichttriviale Lösungen genau wenn $\det(\underline{A}) \neq 0$.

Beispiel 7:

Für welche Werte des Parameters $p \in \mathbb{R}$ hat das folgende System nichttriviale Lösungen. Welches sind diese ?

$$\begin{cases} px_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + px_2 - x_3 = 0 \\ \qquad px_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

$$\det(\underline{A}) = \begin{vmatrix} p & -1 & 2 \\ 2 & p & -1 \\ 0 & p & 1 \end{vmatrix} = p \cdot \begin{vmatrix} p & -1 \\ p & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & p \\ 0 & p \end{vmatrix} = 2p^2 + 2 + 4p = 2(p+1)^2$$

Es gilt: $\det(\underline{A}) = 0$ für $p = -1.$

Die nichttrivialen Lösungen für $p=-1$ berechnen wir mit der Gauß Elimination:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das System ist unterbestimmt:

$\Rightarrow x_3 = t,$

$\Rightarrow x_2 = t,$

$\Rightarrow x_1 = 2t - t = t$

V) ANWENDUNGEN DER LINEAREN ALGEBRA

A) EIGENWERTPROBLEME

Viele Praxisanberechnungen (z.B. Frequenz von Schwingungen, Hauptachsen von Ellipsoiden) werden zurückgeführt auf das folgende Problem:

„Wann ist der Vektor $\underline{A}\underline{v}$ parallel zu $\underline{v}$?“

(EWP) Eigenwertprobleme:

$\underline{A}$ ist eine quadratische Matrix der Dimension n. Gesucht sind Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\lambda \neq 0)$ und Vektoren $\underline{v} \neq \underline{0}$ für die gilt:

$$\underline{A}\underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$$

Die Zahlen λ mit dieser Eigenschaft werden Eigenwerte (EW) der Matrix $\underline{A}$ genannt, die entsprechenden Vektoren $\underline{v}$ sind die Eigenvektoren (EV) zum Eigenwert λ.

Die Lösung:

$$\underline{A}\underline{v} = \lambda \cdot v \Rightarrow \underline{A}\underline{v} - \lambda \cdot \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \left(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{E}\right)\underline{v} = \underline{0}$$

Mathematisch ist ein AWP ein homogenes LGS mit einem Parameter λ.

Satz

Die EW der Matrix $\underline{A}$ sind die Lösungen $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ der ‚charakteristischen' Gleichung:

$$P(\lambda) = \det\left(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{E}\right) = 0;$$

Die EV zum EW $\lambda = \lambda_k$ sind die Lösungen $\underline{v}_k$ des homogenen (unterbestimmten) Systems:

$$\left(\underline{A} - \lambda_k \cdot \underline{E}\right)\underline{v} = \underline{0} \ .$$

Beispiel 1:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung

1) Berechnung der Eigenwerte

Ansatz:

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

2) Berechnung der Eigenvektoren

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \lambda_1$:

Ansatz:

$$(\underline{A} - \lambda_1 \underline{E})\underline{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \quad \text{(unterbestimmtes LGS !)}$$

Eine Lösung des LGS ist $v_1 = v_2 = 1$ und ein Eigenvektor $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = 3$ ergibt sich analog $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

<u>Beispiel 2</u>:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Lösung</u>

1) Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-2-\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \notin \mathbb{R}$$

(siehe komplexe Zahlen, Mathe 2)

2) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Hausaufgabe</u>:

BzM 2 Aufg. 47, Prüfungsaufgaben:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Wiederholungsaufgaben</u>

BzM2, Prüfungen ab S2000, Blatt Lineare Algebra,

B) ABBILDUNGEN BzM 2, Seite 66-71 und Folien 13-15.