BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Übungen

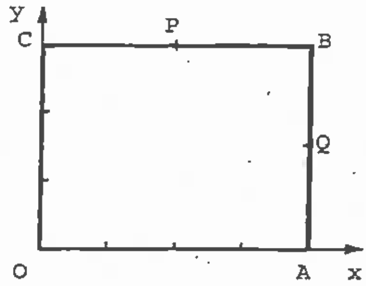
Aufgaben zur

Vektorrechnung

5. AUFGABEN

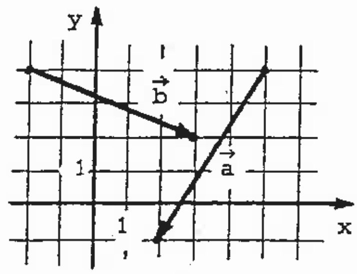
5.1. Aufgaben zur Vektoralgebra (Abschnitt 3)

1.) Im skizzierten Rechteck OABC mit A(4/0) und C(0/3) sei P der Mittelpunkt von BC und Q der Mittelpunkt von AB.



Wie lautet die Komponentendarstellung der Vektoren $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{QP}$?

2.) Ermitteln Sie die Koordinatendarstellung der skizzierten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

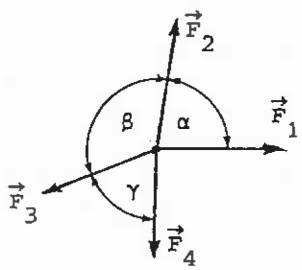


3.) Ein Vektor $\vec{r}$ mit $|\vec{r}| = 7$ und dem Anfangspunkt A(2 / 1 / -1) hat die Koordinaten $r_x = 2$ und $r_y = -3$. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate r_z des Vektors und die Koordinaten seines Endpunkts.

4.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (2;3;0)$, $\vec{b} = (3;4;0)$, $\vec{c} = (3;-1;0)$. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch

a) $\vec{a} - \vec{c}$; b) $\vec{c} - \vec{a}$; c) $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.

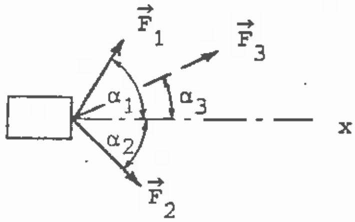
5.) An einem Verteilermast greifen vier Kräfte an, die in einer Ebene liegen. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch Betrag und Richtung der Resultierenden $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$.



Gegeben: $|\vec{F}_1| = 380\,N$, $|\vec{F}_2| = 400\,N$, $|\vec{F}_3| = 300\,N$, $|\vec{F}_4| = 440\,N$

$\alpha = 80^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 70^\circ$.

6.) Ein Wagen wird an drei Seilen gezogen. Wie groß müssen $|\vec{F}_3|$ und α_3 sein, damit am Wagen eine Kraft von 1 000 N in x-Richtung wirkt?



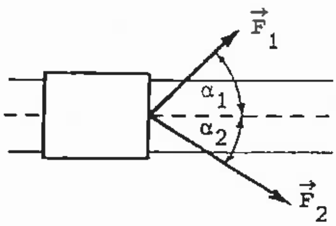
Gegeben: $|\vec{F}_1| = 700\,N$, $|\vec{F}_2| = 600\,N$, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = (-)\,45^\circ$.

Lösung zeichnerisch und rechnerisch!

7.) Ein Schienenfahrzeug wird gemäß Skizze gezogen mit

$|\vec{F}_1| = 200\,N$, $|\vec{F}_2| = 400\,N$,

$\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = (-)\,30^\circ$



Ermitteln Sie die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ und ihre Richtung gegen die Schienen

a) zeichnerisch

b) durch trigonometrische Berechnung

c) durch Rechnung in einem geeigneten Koordinatensystem.

8.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (-2\,;\,3\,;\,1)$, $\vec{b} = (2\,;\,-3\,;\,-1)$.

a) Berechnen Sie den Vektor $\vec{c}$ so, daß gilt: $2\vec{a} - 3\vec{c} = 4\vec{b}$.

b) Bestimmen Sie die Einsvektoren in Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

9.) Zum Vektor $\vec{a}$ soll ein Vielfaches des Vektors $\vec{b}$ addiert werden, so daß die Summe von $\vec{a}$ und $\lambda\vec{b}$ auf $\vec{c}$ senkrecht steht. Wie muß man λ wählen?

Geben Sie zunächst die allgemeine Lösung an und berechnen Sie λ anschließend für die speziellen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

10.) Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = (1\,;\,2\,;\,0)$. Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{v}$, für die gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0\,.$$

11.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (2;1)$ und $\vec{b} = (1;2)$.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$, sowie die zugehörigen Einsvektoren.

b) Wie groß sind die Winkel $\varphi_1 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{i})$; $\varphi_2 = \sphericalangle(\vec{b}; \vec{j})$ und $\varphi_3 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$?

c) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{c}$ mit: $|\vec{c}| = 3$, $c_y > 0$, $\vec{c} \perp \vec{a}$.

12.) Im Punkt A greifen drei Kräfte an:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{N}; \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{N}; \qquad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{N}.$$

a) Berechnen Sie die Koordinatendarstellung der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$, sowie deren Betrag.

b) Wie groß sind die Winkel $\varphi_i = \sphericalangle(\vec{F}_R, \vec{F}_i)$, $i = 1,2,3$?

13.) Der Ortsvektor des Punktes P bildet mit der x-Achse einen Winkel von 45° und mit der y-Achse einen Winkel von 60°; sein Betrag ist 6; P liegt im Halbraum $z < 0$.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

14.) Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a} = (2;-3;-1)$, $\vec{b} = (-3;5;-2)$, $\vec{c} = (1;2;0)$, $\vec{d} = (2;-1;0)$.

Berechnen Sie die (Parallel-) Komponenten

$\vec{a}_b$, $\vec{b}_a$, $\vec{c}_d$, $\vec{d}_c$.

15.) Gegeben sind drei aufeinanderfolgende Eckpunkte des Parallelogramms ABCD mit A(-3/2/0), B(3/-3/1), C(5/0/2).

Gesucht wird:

a) der vierte Eckpunkt D,

b) Länge und Richtung der beiden Diagonalen AC und BD,

c) der Winkel zwischen AC und BD.

X

16.) Ein Spat (Parallelflach) wird aufgespannt von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ mit gemeinsamem Anfangspunkt O und mit $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 2$; $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 120^\circ$, $\sphericalangle(\vec{b},\vec{c}) = 60^\circ$, $\sphericalangle(\vec{c},\vec{a}) = 120^\circ$.

Bestimmen Sie folgende Größen:

a) die Längen der Flächendiagonalen im Parallelogramm $(\vec{a},\vec{b})$;
b) die Länge der von O ausgehenden Raumdiagonalen $\vec{d}$;
c) die Winkel zwischen $\vec{d}$ und den Kantenvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
d) die Projektionen d_a, d_b, d_c von $\vec{d}$ auf $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

17.) a) Welchen Winkel φ bilden die (sich in einer Ecke schneidenden) Flächendiagonalen zweier aneinander grenzender Würfelflächen ?

b) Unter welchem Winkel ψ schneiden sich die Raumdiagonalen eines Würfels ?

18.) Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{x}$ in der x,y-Ebene, welche die Gleichung erfüllen

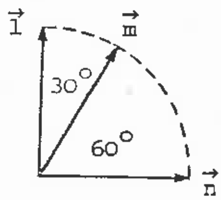
$$\vec{a} \cdot \vec{x} = b \quad \text{mit} \quad \vec{a} = (1\,;2\,;0) \quad \text{und} \quad b = 5 .$$

Veranschaulichen Sie das Ergebnis in einer Skizze; wählen Sie dazu den Koordinatenursprung als Anfangspunkt der Vektoren. Verallgemeinerung ?

X

19.) Drei Einsvektoren $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ liegen in einer Ebene mit

$\sphericalangle(\vec{l},\vec{m}) = 30^\circ$, $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 60^\circ$.



Zeichnen Sie den Vektor $\vec{a} = \vec{l} + 2\vec{m} - 3\vec{n}$ und berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{l}$.

20.) Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \times \vec{k}$

b) $\vec{i} \times [\,\vec{j} \times (\vec{k} \times \vec{i}) + (\vec{j} \times \vec{k}) \times \vec{i} + (\vec{j} \times \vec{i}) \times (\vec{j} \times \vec{k})\,]$

21.) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $(2\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}+2\vec{b})$

b) $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot [(\vec{a}+\vec{c}) \times \vec{b}]$

c) $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}) \cdot [(\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})]$

22.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 5, \quad \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 45^\circ$$

a) Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$ und $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ein?

b) Wie groß ist der Flächeninhalt des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Dreiecks?

23.) $\vec{m}$ und $\vec{n}$ sind Einsvektoren mit $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 30^\circ$.

a) Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a} = 2\vec{m}+\vec{n}$ und $\vec{b} = \vec{m}-2\vec{n}$ aufgespannt wird.

b) Welchen Winkel bilden die Diagonalen miteinander?

c) Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Parallelogramms?

24.) Welchen Wert hat der folgende Ausdruck: $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + (\vec{a}\times\vec{b})^2 = ?$

25.) Was folgt für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus folgenden Aussagen?

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ <u>und</u> $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

b) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}\cdot\vec{b} \quad (\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0})$

c) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 \quad (\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0})$

26.) Bringen Sie folgende Ausdrücke auf die einfachste Form:

a) $(3\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{c}) \cdot (\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})$

b) $(3\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{c}) \times (\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})$

27.) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a}$ in Komponenten parallel und normal zu $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = (-2\,;\,-1\,;\,2)$, $\vec{b} = (-5\,;\,3\,;\,4)$

b) $\vec{a} = (7\,;\,-2\,;\,2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ mit $A(1/0/1)$, $B(2/1/-1)$

28.) Welchen Flächeninhalt hat das Parallelogramm, dessen Diagonalen durch die Vektoren $\vec{d}_1 = (3\,;\,1\,;\,-2)$ und $\vec{d}_2 = (1\,;\,-3\,;\,4)$ gegeben sind ?

29.) Bestimmen Sie die Normalen-Einsvektoren der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebenen:

a) $\vec{a} = (3\,;\,2\,;\,5)$, $\vec{b} = (0\,;\,3\,;\,-1)$

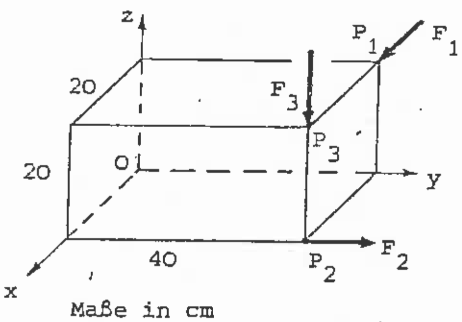
b) $\vec{a} = (2\,;\,-1\,;\,0)$, $\vec{b} = (1\,;\,4\,;\,-3)$

30.) Gegeben sind die Punkte $A(1/-1/2)$, $B(2/1/3)$, $C(4/0/1)$. Unter der Wirkung der konstanten Kraft $\vec{F} = (1\,;\,1\,;\,1)$ bewegt sich ein Massenpunkt m von A nach B. Wie groß ist die dabei verrichtete Arbeit [Krafteinheit 1 N , Längeneinheit 1 m],

a) falls sich m auf kürzestem Weg von A nach B bewegt ?

b) falls sich m von A nach B längs der Strecken AC und CB bewegt ?

31.) An einem Quader wirken drei zu den Koordinatenachsen parallele Kräfte.



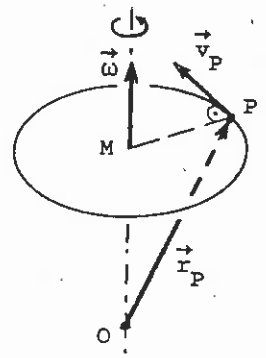
Maße in cm

$|\vec{F}_1| = 100\,\text{N}$, $|\vec{F}_2| = 150\,\text{N}$, $|\vec{F}_3| = 120\,\text{N}$

a) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$ und des resultierenden Moments $\vec{M}_O$ bezogen auf den Ursprung.

b) Wie groß sind Betrag und Richtungswinkel von $\vec{F}_R$?

32.) Ein starrer Körper dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch O gehende Drehachse; P sei ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{r}_P$. Führt man den Winkelgeschwindigkeits-Vektor $\vec{\omega}$ in Richtung der Drehachse (Rechtsschraube) ein, so erhält man die Momentangeschwindigkeit des Punktes P (Tangentialgeschwindigkeit) in der Form



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{\omega} = (0;0;1)\ [\frac{1}{sec}]$ und $\vec{r}_P = (3;4;2)$ [m]. Wie groß ist $\vec{v}_P$? Welche Richtung hat $\vec{v}_P$?

b) Bei Drehung um die z-Achse mit $\omega_z > 0$ hat der Punkt Q $(1/2/1)$ [m] die Tangentialgeschwindigkeit $\vec{v}_Q$ mit $|\vec{v}_Q| = v = 5\,\frac{m}{sec}$. Ermitteln Sie ω_z und die Koordinatendarstellung von $\vec{v}_Q$.

33.) Gegeben ist das Dreieck ΔABC mit $A(1/0/1)$, $B(-1/1/0)$ und $C(1/1/1)$.

a) Berechnen Sie Seitenlängen und Winkel des Dreiecks.

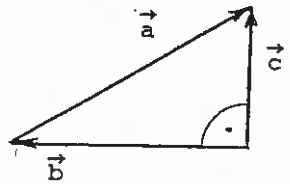
b) Wie groß ist die Dreiecksfläche?

34.) Gegeben: $A(-1/0/2)$, $B(1/1/-3)$, $C(0/3/2)$, $D(2/-1/4)$.
Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders ABCD, sowie die Flächeninhalte der Dreiecke, die das Tetraeder begrenzen.

35.) Ein Tetraeder wird von den Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ aufgespannt, wobei die drei Vektoren in Richtung der Winkelhalbierenden zwischen den (positiven) Koordinatenachsen zeigen und die Länge 2 haben. Wie groß ist das Volumen des Tetraeders?

36.) Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} p \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix}$



Bestimmen Sie p, q, r, s so, daß sich das skizzierte Vektordreieck bilden läßt.

37.) Spannen die folgenden Vektoren den $\mathbb{R}^3$ auf ?

a) $\vec{a}_1 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (1; 0; -2)$, $\vec{a}_3 = (3; 1; 1)$;

b) $\vec{b}_1 = (1; 2; 0)$, $\vec{b}_2 = (1; 2; -2)$, $\vec{b}_3 = (0; 1; 2)$.

38.) Untersuchen Sie die folgenden Vektoren jeweils auf lineare Abhängigkeit. Ermitteln Sie gegebenenfalls eine lineare Beziehung zwischen den Vektoren.

a) $\vec{a}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 3)$

b) $\vec{b}_1 = (2; -4; -6)$, $\vec{b}_2 = (-3; 6; 9)$

c) $\vec{c}_1 = (1; -2; -3)$, $\vec{c}_2 = (-1; 1; 2)$, $\vec{c}_3 = (-1; -1; 0)$

d) $\vec{d}_1 = (2; -1; -3)$, $\vec{d}_2 = (1; 2; 3)$, $\vec{d}_3 = (1; 0; -1)$

39.) Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a} = (-1; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; -3; -4)$, $\vec{c} = (-3; 12; 6)$

a) Zeigen Sie, daß die Vektoren komplanar sind.

b) Zerlegen Sie $\vec{c}$ in Komponenten nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

40.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = (-1; 1; 3)$, $\vec{v} = (2; -1; -1)$.

a) Wie muß man k wählen, damit der Vektor $\vec{w} = (4; -1; k)$ in Komponenten nach $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zerlegt werden kann?

b) Wie lautet die Komponentenzerlegung?

41.) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ seien beliebige Vektoren. Zeigen Sie, daß folgende Vektoren linear abhängig sind:

$$\vec{v}_1 = \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a} , \quad \vec{v}_2 = \vec{c} + \vec{a} - 2\vec{b} , \quad \vec{v}_3 = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} .$$

42.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ auf lineare Abhängigkeit.

b) Stellen Sie $\vec{d}$ dar als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

43.) Gegeben sind die Vektoren

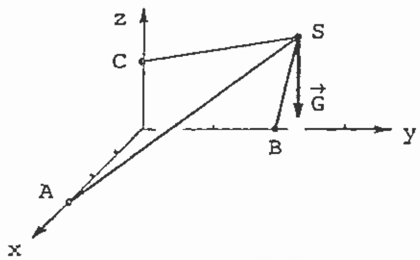
$$\vec{a} = (1 ; 1 ; 2) , \quad \vec{b} = (0 ; 1 ; -1) , \quad \vec{c} = (1 ; 0 ; 1)$$

a) Zeigen Sie, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig sind.

b) Zerlegen Sie $\vec{v} = (1 ; 0 ; -1)$ in Komponenten nach $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

44.) Am skizzierten Gerüst aus drei gelenkig gelagerten Stäben hängt eine Last vom Gewicht $G = 19$ kN .

Ermitteln Sie die Stabkräfte, d.h. zerlegen Sie den Vektor $\vec{G} = (0;0;-G)$ in die Richtungen $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$. Welche Stäbe sind Druckstäbe (Zugstäbe) ?



A(3/0/0) , B(0/2/0) , C(0/0/1) , S(2/3/2)

45.) Gegeben sind die Punkte

A(1/2/4) , B(2/-1/3) , C(6/3/-5) , D(-7/4/-1)

a) Liegen die Punkte A , B , C auf einer Geraden ?

b) Liegen die Punkte A , B , C , D in einer Ebene ?

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Übungen

Aufgaben zur

Analytischen Geometrie

5.2. Aufgaben zur Analytischen Geometrie (Abschnitt 4)

46.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (3;4)$, $\vec{b} = (1;-2)$. Bestimmen Sie in einem kartesischen Oxy-Koordinatensystem den Schnittpunkt P der Geraden g_1: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ mit der x-Achse und geben Sie eine Gleichung an für die Gerade g_2, die durch P geht und auf g_1 senkrecht steht.

47.) Die Gerade g geht durch P (1 /-3/ 2) und ist parallel zu einem Vektor $\vec{a}$, dessen Richtung durch die Richtungscosinus $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\cos\gamma > 0$ bestimmt ist. In welchen Punkten durchstößt g die Koordinatenebenen?

48.) Gegeben sind die Punkte

$$P_1(-1/3/7), \quad P_2(-5/4/3), \quad P_3(6/-5/-4).$$

a) Geben Sie für die Geraden P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 jeweils eine Gleichung in Parameterform an.

b) Welche Winkel besitzt das Dreick $\Delta P_1P_2P_3$?

49.) Zeigen Sie, daß sich die Geraden g und h schneiden; welche Koordinaten hat der Schnittpunkt? Wie groß ist der Winkel zwischen g und h ?

a) g_1: Ursprungsgerade durch P (2 / -2 / 2)
h_1: $\{ x = 2z - 1, \quad y = -2z + 1 \}$

b) g_2: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$
h_2: $\{ x = z + 1, \quad y = 4 - z \}$

50.) Gegeben sind die Punkte $P_1(-1/5/4)$, $P_2(4/3/2)$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden P_1P_2.

b) Welche Koordinaten hat der Durchstoßpunkt P_3 durch die x,y-Ebene?

c) Liegt der Punkt $P_4(4/1/2)$ auf der Geraden P_1P_2?

51.) Gegeben sind die vier Punkte

$P_1(-3/5/-2)$, $P_2(-1/3/0)$, $P_3(3/0/2)$, $P_4(0/3/-1)$.

a) Zeigen Sie, daß die Punkte ein ebenes Viereck bilden.

b) Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Vierecks ?

c) Wie lautet eine Gleichung der Ebene, in der alle vier Punkte liegen ? (Parameterdarstellung und implizite Gleichung)

d) Bestimmen sie eine Gleichung der Geraden durch $Q(-8/2/-7)$, die senkrecht steht auf dieser Ebene.

52.) Gegeben sind die Ebenen

$$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, daß E_1 und E_2 parallel sind.

b) Wie groß ist der Abstand der Ebenen ?

53.) Eine Ebene E geht durch $P_o(4/2/2)$ und wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{a} = (3;2;-2)$ und $\vec{b} = (1;0;-1)$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g, die senkrecht steht auf E und durch P_o geht.

b) Wie lauten die Koordinaten der Punkte auf g, die von der Ebene E den [redacted]tand $d = 6$ haben ?

c) In welchen Punkten durchsetzt g die Koordinatenebenen ?

d) Welchen Winkel β schließt die Richtung von g mit der y-Achse ein ?

54.) Gegeben sind zwei Ebenen jeweils durch drei Punkte:

E_1: $P_1(1/-1/2)$, $P_2(3/0/-1)$, $P_3(-1/2/0)$

E_2: $Q_1(2/0/3)$, $Q_2(0/1/-2)$, $Q_3(6/-2/6)$

a) Ermitteln Sie einen Richtungsvektor der Schnittgeraden von E_1 und E_2, sowie ihren Durchstoßpunkt mit der x,y-Ebene.

b) Wie groß ist der Winkel φ zwischen E_1 und E_2 ?

55.) Gegeben ist die Ebene E durch die drei Punkte

$P_1(2/0/4)$, $P_2(-1/3/5)$, $P_3(1/4/2)$.

Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene

a) in Parameterform ; b) implizit in Koordinaten .

56.) Die Ebene E ist gegeben durch den Punkt P(0/3/1) und den Normalenvektor $\vec{n} = (2;3;1)$. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q(6/5/2) von E, sowie die Koordinaten seines Lotfußpunktes S .

57.) Gegeben ist die Pyramide PQRS mit den Ecken P(3/0/0) , Q(0/5/0) , R(0/0/3) , S(0/-2/0). Skizze ! Wie groß ist die Höhe h der Pyramide über der Grundfläche (PQR) ?

58.) Eine Pyramide hat die Ecken A(1/0/0), B(0/2/0), C(-1/-1/0), D(0/0/2). Wie groß sind die Winkel zwischen der Grundfläche (ABC) und

a) den Kanten (AD), (BD), (CD) ;

b) den Seitenflächen (ABD), (BCD), (ACD) ?

Skizzieren Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem.

59.) Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a} = (2;2;1)$, $\vec{b} = (4;3;0)$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Winkelhalbierende der beiden Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, die durch die Winkelhalbierende geht und senkrecht steht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

60.) Gegeben ist die Ebene E: $4x + 2y + z - 16 = 0$. Berechnen Sie:

a) Schnittpunkte P_x, P_y, P_z und Schnittwinkel (Neigungswinkel) $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ mit den Koordinatenachsen ;

b) Schnittwinkel $\beta_{xy}, \beta_{xz}, \beta_{yz}$ mit den Koordinatenebenen ;

c) Abstand des Ursprungs von der Ebene E .

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Lösungen

5.3. Lösungen

1.) $\overrightarrow{OP} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\overrightarrow{OQ} = 4\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$; $\overrightarrow{AC} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$; $\overrightarrow{QP} = -2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$

2.) $\vec{a} = (-3\,;\,-5)$, $\vec{b} = (5\,;\,-2)$

3.) 2 Lösungen: $r_z = \pm 6$, Endpunkte $P_1(4\,/-2/\,5)$, $P_2(4\,/-2/-7)$

4.) a) $(-1\,;\,4\,;\,0)$ b) $(1\,;\,-4\,;\,0)$ c) $(-2\,;\,2\,;\,0)$

5.) $|\vec{F}_R| = 224\,\text{N}$, $\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_R) = (-)\,41{,}6^\circ$ (nach unten)

6.) $|\vec{F}_3| = 289{,}9\,\text{N}$, $\alpha_3 = (-)\,38{,}9^\circ$ (nach rechts)

7.) a) Maßstab etwa $m_F = 100\,\text{N/cm}$: $|\vec{F}_R| \approx 490\,\text{N}$, $\alpha_R \approx (-)\,7^\circ$
b) mit Hilfe von Sinus- und Cosinus-Satz: $|\vec{F}_R| = 491{,}3\,\text{N}$, $\alpha_R = -6{,}85^\circ$
c) x-Achse $\parallel$ Schienen: $F_{Rx} = 487{,}8\,\text{N}$, $F_{Ry} = -58{,}6\,\text{N}$

Bemerkung: Rechnung in Koordinaten einfacher und sicherer! Vor allem dann, wenn mehr als 2 Kräfte zu addieren sind.

8.) a) $\vec{c} = (-4\,;\,6\,;\,2)$ b) $\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2\,;\,3\,;\,1)$, $\vec{e}_b = -\vec{e}_a$.

9.) Bedingung: $(\vec{a} + \lambda\vec{b})\cdot\vec{c} = 0 \Rightarrow \lambda = -\,\vec{a}\cdot\vec{c}\,/\,\vec{b}\cdot\vec{c} = 1$

10.) $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$: $v_x + 2v_y = 0 \Rightarrow \vec{v} = (-2p\,;\,p\,;\,q)$, $p, q \in \mathbb{R}$ (beliebig)

11.) a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, $\vec{e}_{a+b} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_{a-b} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$
b) $\varphi_1 = \varphi_2 = 26{,}565^\circ$; $\varphi_3 = 36{,}87^\circ$ ($\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 90^\circ$; Skizze !)
c) $\{\vec{c} \perp \vec{a}$: $c_y = -2c_x$; $|\vec{c}| = 3$: $c_x^2 + c_y^2 = 9$; $c_y > 0\} \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}-3/\sqrt{5}\\6/\sqrt{5}\end{pmatrix}$

12.) $\vec{F} = (3\,;\,3\,;\,2)\,\text{N}$, $|\vec{F}| = \sqrt{22}\,\text{N}$; $\varphi_1 = 20{,}82^\circ$, $\varphi_2 = 174{,}27^\circ$, $\varphi_3 = 69{,}19^\circ$

13.) $P(3\sqrt{2}\,/\,3\,/-3)$

14.) $\vec{a}_b = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\5\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{b}_a = -\frac{19}{14}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{c}_d = \vec{d}_c = \vec{0}$, da $\vec{c} \perp \vec{d}$

15.) a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ seien Ortsvektoren von A, B, C, D; dann folgt (Skizze !)
$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} \Rightarrow D(-1\,/\,5\,/\,1)$
b) $\overrightarrow{AC} = (8\,;\,-2\,;\,2)$, $|\overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{2}$; $\overrightarrow{BD} = (-4\,;\,8\,;\,0)$, $|\overrightarrow{BD}| = 4\sqrt{5}$.
c) $\cos\alpha = -2/\sqrt{10}$, $\alpha = 129{,}23^\circ$

16.) a) $|\vec d_1| = |\vec a+\vec b| = \sqrt{(\vec a+\vec b)^2} = \sqrt{\vec a^{\,2}+2\vec a\cdot\vec b+\vec b^{\,2}} = \sqrt{19}$; $|\vec d_2| = |\vec a-\vec b| = 7$

b) $|\vec d| = |\vec a+\vec b+\vec c| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

c) $\cos\alpha = -\frac{1}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 95{,}52^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $\gamma = 54{,}74^\circ$

d) $d_a = |\vec d| \cos\alpha = -\frac{1}{2}$; $d_b = |\vec d| \cos\beta = \frac{9}{2}$; $d_c = |\vec d| \cos\gamma = 3$

17.) a) $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 60^\circ$ (3 geeignet gewählte Flächendiagonalen bilden ein gleichseitiges Dreieck !)

b) $\cos\psi = \frac{1}{3}$, $\psi = 70{,}5^\circ$

18.) Aus $\vec a\cdot\vec x = 5$ folgt mit $\vec a = (1;2;0)$ und $\vec x = (x;y;0)$: $x + 2y = 5$
Die Endpunkte aller gesuchten Ortsvektoren liegen auf der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. [Verallgemeinerung: s. Bsp. 13 S. 29]

19.) $\cos\sphericalangle(\vec a,\vec 1) = 0{,}807 \Rightarrow \sphericalangle(\vec a,\vec 1) = 36{,}2^\circ$

20.) a) $-2\vec j + 2\vec k$; b) $-\vec k$

21.) a) $3(\vec a\times\vec b)$ b) $\vec a\cdot(\vec c\times\vec b) = -[\vec a\,\vec b\,\vec c]$ c) $3\,[\vec a\,\vec b\,\vec c]$

22.) a) $\cos\sphericalangle(\vec u,\vec v) = \frac{\vec u\cdot\vec v}{|\vec u|\,|\vec v|}$; $\vec u\cdot\vec v = (\vec a-2\vec b)\cdot(3\vec a+2\vec b) = 3\vec a^{\,2} - 4\vec a\cdot\vec b - 4\vec b^{\,2} = \ldots$

$\cos\sphericalangle(\vec u,\vec v) = -0{,}899 \Rightarrow \sphericalangle(\vec u,\vec v) = 154{,}06^\circ$

b) $A = \frac{1}{2}|\vec u\times\vec v|$; $\vec u\times\vec v = (\vec a-2\vec b)\times(3\vec a+2\vec b) = 2\vec a\times\vec b - 6\vec b\times\vec a = 8\,\vec a\times\vec b$

$\Rightarrow A = 4\,|\vec a\times\vec b| = 20\sqrt{2}$

23.) a) $|\vec a+\vec b| = 2{,}19$; $|\vec a-\vec b| = 3{,}90$

b) $\cos\alpha = \frac{(\vec a+\vec b)\cdot(\vec a-\vec b)}{|\vec a+\vec b|\,|\vec a-\vec b|} = 0{,}811 \Rightarrow \alpha = 35{,}8^\circ$

c) $A = |\vec a\times\vec b| = |5\vec n\times\vec m| \doteq \frac{5}{2}$

24.) $|\vec a|^2\cdot|\vec b|^2$

25.) a) entweder $\vec a = \vec 0$ oder $\vec b = \vec 0$ (oder beide $\vec 0$)

b) $\sphericalangle(\vec a,\vec b) = 45^\circ$; c) $\vec a$ parallel $\vec b$

26.) a) $3\vec a^{\,2} - 10\vec b^{\,2} + 8\vec c^{\,2} - \vec a\cdot\vec b - 14\vec a\cdot\vec c - 16\vec b\cdot\vec c$

b) $-11\,\vec a\times\vec b - 10\,\vec a\times\vec c - 24\,\vec b\times\vec c$

27.) a) $\begin{pmatrix}-1{,}5\\0{,}9\\1{,}2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0{,}5\\-1{,}9\\0{,}8\end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}41\\-13\\14\end{pmatrix}$

28.) $A = \frac{1}{2}\,|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = 5\sqrt{3}$

29.) a) $\pm \frac{1}{\sqrt{379}}\,(-17\,;\,3\,;\,9)$ b) $\pm \frac{1}{\sqrt{14}}\,(1\,;\,2\,;\,3)$

30.) a) $\vec{F}\cdot\vec{s} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ \mathrm{Nm} = 4\ \mathrm{Nm}$

b) $\vec{F}\cdot\vec{s}_1 + \vec{F}\cdot\vec{s}_2 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right]\ \mathrm{Nm} = 4\ \mathrm{Nm}$

Die Arbeit ist wegunabhängig !

31.) a) Mit $\{\vec{F}_i\,,\ \vec{r}_i = \overrightarrow{OP}_i\ ;\ i=1,2,3\}$ ergibt sich

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i = \begin{pmatrix}100\\150\\-120\end{pmatrix}\ \mathrm{N}\ ; \qquad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{3}(\vec{r}_i\times\vec{F}_i) = \begin{pmatrix}-48\\44\\-10\end{pmatrix}\ \mathrm{Nm}$$

b) $|\vec{F}_R| = 216{,}56\,\mathrm{N}\ ;\quad \varphi_x = 62{,}50^\circ,\quad \varphi_y = 46{,}16^\circ,\quad \varphi_z = 123{,}65^\circ$

32.) a) $\vec{v}_P = (-4\,;\,3\,;\,0)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$. $\vec{v}_P$ liegt in einer Ebene senkrecht zur Drehachse, tangential an den Kreis mit Mittelpunkt M auf der Drehachse und Radius $\rho = \overline{MP} = \sqrt{x_P^{\,2} + y_P^{\,2}} = 5\ \mathrm{m}$

b) $|\vec{v}_Q| = |\vec{\omega}|\,|\vec{r}_Q|\sin\sphericalangle(\vec{\omega},\vec{r}_Q) = \omega_z\,\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \omega_z\cdot$ (Abstand Q - z-Achse)

$\Rightarrow\quad \omega_z = \sqrt{5}\,\frac{1}{\mathrm{sec}}\ ;\qquad \vec{v}_Q = \vec{\omega}\times\vec{r}_Q = \sqrt{5}\,(-2\,;\,1\,;\,0)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$

33.) a) $\overline{AB} = \sqrt{6}$, $\overline{BC} = \sqrt{5}$, $\overline{CA} = 1$; $\alpha = 65{,}9^\circ$, $\beta = 24{,}1^\circ$, $\gamma = 90^\circ$; b) $A = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

34.) $V = 10$; $A_{\Delta ABC} = \frac{5}{2}\sqrt{11}$, $A_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\sqrt{395}$, $A_{\Delta ACD} = \sqrt{35}$, $A_{\Delta BCD} = 6\sqrt{5}$

35.) $\overrightarrow{OA} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $V = \frac{1}{6}\,\left|[\,\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}\,]\right| = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

36.) $p_{1,2} = (1 \pm \sqrt{105})/2$; $q_{1,2} = p_{1,2} - 1$; $r = -6$; $s = 1$

37.) a) $[\,\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\,] = 0$: Vektoren sind komplanar, spannen den $\mathbb{R}^3$ nicht auf ;
b) $[\,\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\,] = 2 \neq 0$: nicht komplanar, spannen den $\mathbb{R}^3$ auf .

38.) a) lin. unabh. (nicht parallel) b) lin. abh.: $3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 = \vec{0}$
c) lin. abh.: $2\vec{c}_1 + 3\vec{c}_2 - \vec{c}_3 = \vec{0}$ d) lin. unabh.

39.) a) $[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = 0$, also komplanar ; b) $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$

40.) a) Bedingung $[\,\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}\,] = 0 \ \Rightarrow\ k = 3$; b) $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

41.) <u>1. Mögl.:</u> $[\,\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\,] = (\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})\cdot\{(\vec{c}+\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})\} = \ldots = 0$

<u>2. Mögl.:</u> $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = (-2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\vec{a} + (\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)\vec{b} + (\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3)\vec{c} = \vec{0}$
Bedingung ist erfüllt für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; also linear abh.

42.) a) <u>1. Mögl.:</u> $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$ besitzt nur die triviale Lsg. $\lambda=\mu=\nu=0$;

<u>2. Mögl.:</u> $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = 85 \neq 0$: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ nicht komplanar, also lin. unabh.

b) Gl.system $\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ hat die Lsg. $p=-2, q=1, r=-1$

$\Rightarrow \vec{d} = -2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

43.) a) $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = -2 \neq 0$ b) $\vec{v} = -\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$

44.) Ansatz: $\vec{G}=\lambda\,\overrightarrow{SA}+\mu\,\overrightarrow{SB}+\nu\,\overrightarrow{SC}$; Lsg.: $\lambda=4,\ \mu=9,\ \nu=-7$; $\lambda,\mu>0$: SA, SB Druckstab, $\nu<0$: SC Zugstab.

Komponenten: $\vec{F}_A = (4;-12;-8)$, $\vec{F}_B = (-18;-9;-18)$, $\vec{F}_C = (14;21;7)$ [kN]

45.) a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ nicht parallel $\Rightarrow$ A, B, C nicht auf einer Geraden

b) $[\,\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\,] = -296 \neq 0 \Rightarrow$ A, B, C, D nicht in einer Ebene

46.) $x_P = a_x - (a_y/b_y)\,b_x = 5$; g_2: $\vec{x} = (5;0)+\mu\,(2;1)$ bzw. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

47.) $g \parallel (1;1;1)$; $P_{xy}(-1/-5/0)$, $P_{yz}(0/-4/1)$, $P_{xz}(4/0/5)$

48.) $\vec{x}_{12} = \begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-4\\1\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{x}_{23} = \begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}11\\-9\\-7\end{pmatrix}$, $\vec{x}_{31} = \begin{pmatrix}6\\-5\\-4\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}-7\\8\\11\end{pmatrix}$

$\sphericalangle(P_1P_2P_3) = 74{,}05^\circ$, $\sphericalangle(P_2P_3P_1) = 21{,}17^\circ$, $\sphericalangle(P_3P_1P_2) = 84{,}78^\circ$

49.) a) $S_1(1/-1/1)$; Richtungsvektoren $\vec{a}_1 = (1;-1;1)$, $\vec{b}_1 = (2;-2;1)$

$\alpha_1 = \sphericalangle(g_1,h_1) = \sphericalangle(\vec{a}_1,\vec{b}_1) = 15{,}79^\circ$

b) $S_2(2/3/1)$; Richtungsvektoren $\vec{a}_2 = (2;3;1)$, $\vec{b}_2 = (1;-1;1)$; $\alpha_2 = 90^\circ$.

50.) a) $\vec{x} = \overrightarrow{OP}_1+\lambda\,\overrightarrow{P_1P_2} = (-1;5;4)+\lambda\,(5;-2;-2)$; b) $P_3(9/1/0)$; c) nein

51.) a) $[\,\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{P_1P_3}\ \overrightarrow{P_1P_4}\,] = 0$; keine 3 Punkte auf einer Geraden

b) Fläche aufbauen aus zwei Dreiecken: $\Delta P_1P_2P_3$, $\Delta P_1P_3P_4$ (P_1, P_2, P_3, P_4 bilden in dieser Reihenfolge ein Viereck, da: $\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3} \uparrow\uparrow \overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P_4}$)

$A = \frac{5}{2}\sqrt{6}$

c) Parameterdarstellung: z.B. $\vec{x} = \overrightarrow{OP}_1+\lambda\,\overrightarrow{P_1P_2}+\mu\,\overrightarrow{P_1P_3}$

$\Rightarrow \vec{x} = (-3;5;-2)+\lambda\,(2;-2;2)+\mu\,(6;-5;4)$

Allg. Ebenengleichung (implizit): $(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow x+2y+z-5 = 0$

d) $\vec{x} = \overrightarrow{OP}+\nu\,\vec{n} = (-8;2;-7)+\nu\,(1;2;1)$

52.) a) Normalenvektoren: $\vec{n}_1 = (-3;3;3)$, $\vec{n}_2 = (1;-1;-1)$; $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow E_1 \parallel E_2$

b) E_2 implizit: $x-y-z+1=0$; Abstand $P_o(2/0/4)$ von E_2 = $d = 1/\sqrt{3}$

53.) a) $\vec{x} = \vec{x}_o + \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (4;2;2) + \lambda(-2;1;-2)$

b) Bedingung: $|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})| = 6 \Rightarrow \lambda = \pm 2 \Rightarrow \{(0/4/-2),\ (8/0/6)\}$

c) $(0/4/-2),\ (8/0/6),\ (2/3/0)$

d) $\cos\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = 70{,}53^\circ$

54.) a) Jeder Richtungsvektor der Schnittgeraden ist proportional dem Vektorprodukt aus Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ von E_1, E_2: $\vec{a} = (4;-2;-1)$.

$$\left.\begin{array}{ll} E_1: & 7x + 10y + 8z - 13 = 0 \\ E_2: & x + 2y \qquad - 2 = 0 \end{array}\right\} \overset{(z=0)}{\Rightarrow} P_{xy}\left(\frac{3}{2} / \frac{1}{4} / 0\right)$$

b) $\varphi = \sphericalangle(E_1, E_2) = \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 34{,}17^\circ$

55.) a) $\vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda\overrightarrow{P_1P_2} + \mu\overrightarrow{P_1P_3} = (2;0;4) + \lambda(-3;3;1) + \mu(-1;4;-2)$ (*)

b) <u>1. Mögl.:</u> λ, μ aus den drei skalaren Gln. (*) eliminieren.

<u>2. Mögl.:</u> Koeffizienten von x,y,z in der Ebenengleichung sind Koordinaten eines Normalenvektors; Absolutglied bestimmen aus Punktprobe.

<u>Erg.:</u> $10x + 7y + 9z - 56 = 0$

56.) a) $(\vec{x} - \vec{x}_P)\cdot\vec{n} = 0 \iff 2x + 3y + z - 10 = 0$

Koordinaten von Q in Hesse-Form eingesetzt: $d = 19/\sqrt{14} = 5{,}078$

b) $S\left(\frac{23}{7} / \frac{13}{14} / \frac{9}{14}\right)$

57.) Ebene (PQR): $5x + 3y + 5z - 15 = 0$; $h = 21/\sqrt{59} = 2{,}734$

58.) a) $\sin\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_1 = 63{,}43^\circ$

$\sin\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$

$\sin\alpha_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha_3 = 54{,}74^\circ$

b) $\cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \beta_1 = 65{,}91^\circ$

$\cos\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow \beta_2 = 72{,}45^\circ$

$\cos\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \Rightarrow \beta_3 = 77{,}40^\circ$

59.) a) Richtungsvektor: $\vec{w} = \vec{e}_a + \vec{e}_b$; Gl. der W.halb.: $\vec{x} = \lambda(22;19;5)$

b) E durch O, aufgespannt von $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{w}$: $\vec{x} = \mu(-3;4;-2) + \nu(22;19;5)$

60.) a) $P_x(4/0/0)$, $P_y(0/8/0)$, $P_z(0/0/16)$

$\sin\alpha_x = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow \alpha_x = 60{,}79^\circ$; $\alpha_y = 25{,}88^\circ$; $\alpha_z = 12{,}60^\circ$

b) $\cos\beta_{xy} = \frac{1}{\sqrt{21}} \Rightarrow \beta_{xy} = 77{,}40^\circ$; $\beta_{yz} = 29{,}21^\circ$; $\beta_{xz} = 64{,}12^\circ$

<u>Beachten Sie:</u> $\alpha_x + \beta_{yz} = 90^\circ$, usw

d) Koordinaten von O in Hesse-Form eingesetzt: $d = 16/\sqrt{21} = 3{,}491$

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Übungsaufgaben
Matrizenrechnung, LGS, Determinanten

Dipl.-Math. M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

VI Aufgaben

1 Matrizen 1

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Matrix $\underline{X}$ aus folgender Gleichung

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} - 2\left\{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \underline{X}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Ermitteln Sie $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ aus folgendem Gleichungssystem

$$3\underline{X} - 2\underline{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad 4\underline{X} + \underline{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Matrix $\underline{A}_{(3,3)}$ mit den Elementen

$$a_{ik} = \left\{\begin{array}{lll} i-1 & \text{für} & i < k \\ i+1 & \text{für} & i \geq k \end{array}\right\}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Matrix $\underline{A}_{(4,4)}$, deren Elemente a_{ik} folgende Bedingungen erfüllen:

$$a_{ik} = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{für} & i = k \\ 2 & \text{für} & i = k-2 \\ 3 & \text{für} & i = k+2 \\ 4 & \text{sonst} & \end{array}\right\}$$

Aufgabe 5

Die Elemente einer $(3,3)$-Matrix sind gegeben durch

$$a_{ik} = (i-3)(2k-4) \quad \{\text{ für } i = 1,2,3; \quad k = 1,2,3\}$$

Berechnen Sie $s = \sum\limits_{n=1}^{3} a_{nn}$

Aufgabe 6

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \; ; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Matrizenprodukte

a) $\underline{A} \cdot \underline{B}$	b) $\underline{B} \cdot \underline{A}$	c) $\underline{A} \cdot \underline{C}$	d) $\underline{C} \cdot \underline{A}$	e) $\underline{A} \cdot \underline{D}$
f) $\underline{D} \cdot \underline{A}$	g) $\underline{B} \cdot \underline{C}$	h) $\underline{C} \cdot \underline{B}$	i) $\underline{B} \cdot \underline{M}$	k) $\underline{M} \cdot \underline{B}$
l) $\underline{D} \cdot \underline{M}$	m) $\underline{M} \cdot \underline{D}$	n) $\underline{A}^2$	o) $\underline{B}^2$	p) $\underline{C}^2$

Aufgabe 7

Bestätigen Sie die Gültigkeit des Gesetzes $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$ für

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \; ; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrizenform

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 0 \\ - 3x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \; ; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie das Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ausführlich an.

Aufgabe 9

Zeigen Sie: Zwischen den Matrizen (Pauli - Spin-Matrizen)

$$\underline{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \underline{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \underline{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bestehen die folgenden Beziehungen ($\underline{E}$ ist die Einheitsmatrix; j ist die imaginäre Einheit mit der Eigenschaft $j^2 = -1$)

$$\text{a) } \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = j \cdot \underline{S}_3 \;;\; \text{b) } \underline{S}_2 \cdot \underline{S}_1 = -j \cdot \underline{S}_3 \;;\; \text{c) } \underline{S}_1^2 = \underline{S}_2^2 = \underline{S}_3^2 = \underline{E}$$

Aufgabe 10

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & q & 2 & -1 \\ -2 & p & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \underline{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Element d_{23} der Matrix $\underline{D} = \underline{C}_1 \cdot \underline{C}_2$

Aufgabe 11

Gegeben sind die Matrizen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; $\underline{B} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

Welcher Bedingung müssen die reellen Parameter p und q genügen, damit gilt

$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$?

Aufgabe 12 $\underline{A} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}$; $\underline{A}^4 = ?$

Aufgabe 13 $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{A}^6 = ?$

Aufgabe 14 $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{B}^2 = ?$

Aufgabe 15

Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & p \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Wie muss man die reellen Parameter p, q wählen, damit gilt $\underline{A}^T \cdot \underline{A} = 2\,\underline{E}$?

Aufgabe 16

Für welche Matrix $\underline{B} = (b_{ik})$ gilt

$$\underline{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 17

Wie muss man den Parameter c in der Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$ wählen, damit die Gleichung $x^2 - 12xy + y^2 = 72$ durch die Matrixgleichung $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 72$ dargestellt wird ?

2 Determinanten

Aufgabe 18

Welche Werte von x, y, z erfüllen die Gleichungen ?

a) $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} y^2 & 4 & 9 \\ y & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\left| \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$

Aufgabe 19

Berechnen Sie die Determinanten

a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$

Aufgabe 20

Berechnen Sie die Determinanten

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 17 & 1 & -3 & 0 \\ -14 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 21

Berechnen Sie die Determinante $D = \begin{vmatrix} e^x + e^{-x} & e^x - e^{-x} \\ e^x - e^{-x} & e^x + e^{-x} \end{vmatrix}$

Aufgabe 22

Wie muss x gewählt werden, damit folgende Gleichung gilt

$$\begin{vmatrix} e^{-x} & 1 & -1 \\ 0 & 3e^{x} & e^{-x} \\ 0 & e^{x} & e^{-2x} \end{vmatrix} = 0\ ?$$

Aufgabe 23

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cdot x &- \sin\alpha \cdot y = a \\ \sin\alpha \cdot x &+ \cos\alpha \cdot y = b \end{aligned}$$

3 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 24

Gegeben ist die allgemeine $(3,3)$-Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\underline{A} \cdot \underline{x}_i$ für folgende Vektoren

$$\text{a) } \underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \text{b) } \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \text{c) } \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie das Ergebnis in Worten!

Aufgabe 25

Für welche Werte des reellen Parameters p existieren Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 9x - 6y &= p \\ -6x + 4y &= 2 \end{aligned} \quad ?$$

Aufgabe 26

Schneiden sich folgende Geraden in einem Punkt? (Rechnung und Skizze!)

$$\text{a) } \begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ 3x + y &= 9 \\ x + 4y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{b) } \begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ x + 2y &= 4 \\ x - 5y &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 27

Wieviele Lösungen haben die Gleichungssysteme?

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{c)}\quad \begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 28

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{pmatrix} \;; \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ p^2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte des reellen Parameters p ist das Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lösbar? Wie lauten jeweils die Lösungen?

Aufgabe 29

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3+x_4+x_5} &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 30

a) Welcher Bedingung müssen p, q, r genügen, damit das lineare Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \;; \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

lösbar ist ?

b) Welcher Wert ergibt sich für r, falls man $p = 1$ und $q = 0$ setzt ?

c) Wie lautet die allgemeine Lösung für die speziellen Werte p, q, r aus Teil b) ?

Aufgabe 31

Für welche Werte von p ist $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ nichttrivial lösbar?

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix}$ b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} (2-p) & 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & (3-p) & -\frac{4}{3} \\ 3 & 3 & -(1+p) \end{pmatrix}$

Lösung ?   Lösung für $p = 2$?

Aufgabe 32

Für welche Werte des Parameters a hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

a) keine Lösung, b) unendlich viele Lösungen, c) eine eindeutige Lösung ?

Aufgabe 33

Gegeben sind die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} 6y_1 - 5y_2 &= 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 8 \\ -2y_1 + 3y_2 &= -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - 2y_2 + \tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2} \\ z_2 &= 4y_2 + x_2 - 2 \\ z_3 &= 2y_1 + \tfrac{1}{2}x_1 + 2x_3 - 1 \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichungen in Matrixform

$$\underline{A}\,\underline{y} = \underline{B}\,\underline{x} + \underline{a}\,; \quad \underline{z} = \underline{C}\,\underline{y} + \underline{D}\,\underline{x} + \underline{b}$$

geschrieben werden können. Wie lauten die Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ und die Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$?

b) Bringen Sie die Gleichungssysteme in die Form $\underline{z} = \underline{R}\,\underline{x} + \underline{c}$

c) Für welche x-Werte ergeben sich die z-Werte $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$?

4 Matrizen 2

Aufgabe 34

Bestimmen Sie die reellen Parameter p, q, r so, dass die Matrizen

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} p & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -q \\ r & 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} p & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & r \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$2(\underline{M}^T + \underline{N}) - (\underline{N}^T + 3\underline{E}) = \underline{0} \qquad (\ \underline{E} \ \ldots \text{ Einheitsmatrix }\ )$$

erfüllen.

Aufgabe 35

Berechnen Sie die skalaren Größen r, s, t aus der Matrixgleichung

$$r\,\underline{E} + s\,\underline{A} + t\,\underline{A}^2 = \underline{0}$$

mit $\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$; $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 36

a) Berechnen Sie die Matrix $\underline{X}$ aus der Gleichung $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$ mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Matrix $\underline{Y}$ aus der Gleichung $\underline{Y} \cdot \underline{C} = \underline{D}$ mit

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 37

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x + 2y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 0 \\ -3x - 2y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

a) mit der Cramerschen Regel,

b) mit dem Gauß-Algorithmus,

c) durch Matrix-Inversion mit Hilfe der Adjunkten.

Vergleichen Sie den jeweiligen Aufwand!

Aufgabe 38

a) Gegeben sind die linearen Beziehungen (Transformationen)

$$\underline{x} = \underline{A} \cdot \underline{y}; \qquad \underline{y} = \underline{B} \cdot \underline{z}.$$

Dabei seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ zwei reguläre (n,n)-Matrizen und $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ $n-$dimensionale Spaltenvektoren. Ermitteln Sie die Matrix $\underline{C}$ der linearen Transformation

$$\underline{z} = \underline{C} \cdot \underline{x}.$$

b) Führen Sie die Berechnung aus Teil a) durch für die Transformationen

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 - z_2 \qquad & x_1 &= y_1 + y_2 \\ y_2 &= -z_1 - z_2 \qquad & x_2 &= y_1 \end{aligned}$$

Aufgabe 39

a) Es sei $\underline{A}$ =diag(a_{ii}) eine Diagonalmatrix der Ordnung 3 und $\underline{x}$ eine $(3,1)$-Matrix (ein Spaltenvektor) mit den Elementen x_1, x_2, x_3. Berechnen Sie den Ausdruck $\underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$.

b) Wie kann man den Ausdruck $a_{11}x_1y_1+a_{22}x_2y_2+a_{33}x_3y_3$ in Matrixschreibweise darstellen?

Aufgabe 40

Zur Matrix $\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ soll eine Matrix $\underline{A}$ gefunden werden, welche die Bedingung $\underline{A} \cdot \underline{S} = \underline{S} \cdot \underline{A}$ erfüllt.

a) Wieviele Zeilen und Spalten muss die Matrix $\underline{A}$ haben ?

b) Folgende Elemente der Matrix $\underline{A}$ seien gegeben:
$a_{11} = 1,\ \ a_{22} = 2,\ \ a_{33} = 3,\ \ a_{32} = -2,\ \ a_{23} = -4$
Berechnen Sie die übrigen Elemente von $\underline{A}$ und die Produktmatrix $\underline{P} = \underline{A} \cdot \underline{S}$.

c) Für welche Zahlen λ hat das lineare Gleichungssystem $\underline{P} \cdot \underline{y} = \lambda\, \underline{y}$ nichttriviale Lösungen ? ($\underline{y}$ ist ein Spaltenvektor mit den Elementen y_1, y_2, y_3.)

Aufgabe 41

Ein Lösungsvektor des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & ?y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \end{array} \qquad \text{ist} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den unleserlichen Koeffizienten.

b) Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.

Aufgabe 42

Untersuchen Sie den Rang der Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ k & -3 & 3 \end{pmatrix}$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter k. Was bedeutet das Ergebnis für die Lösbarkeit des Gleichungssystems $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$?

Aufgabe 43

Bestimmen Sie den Rang der beiden Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\underline{A}; \underline{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

und diskutieren Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystems $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$.

Aufgabe 44

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 45

Bestätigen Sie die Gültigkeit der Rechenregel $(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}$ für die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 46

Ermitteln Sie die inversen Matrizen durch elementare Zeilenumformungen:

a) $\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5 Anwendungen

Aufgabe 47

Gegeben ist die Matrix $\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Welche Eigenschaft hat die Abbildung $\underline{x}^* = \underline{M} \cdot \underline{x}$?

b) Ermitteln Sie das Bild des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(1/1)$; $B(4/1)$; $C(3/2)$ unter der Abbildung $\underline{x}^* = \underline{M} \cdot \underline{x}$.
Skizzieren Sie Dreieck ABC und Bilddreieck $A^*B^*C^*$

Aufgabe 48

Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie das zugehörige Eigenwertproblem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$ in folgenden Teilschritten:

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem ausführlich an.

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2.

c) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$.

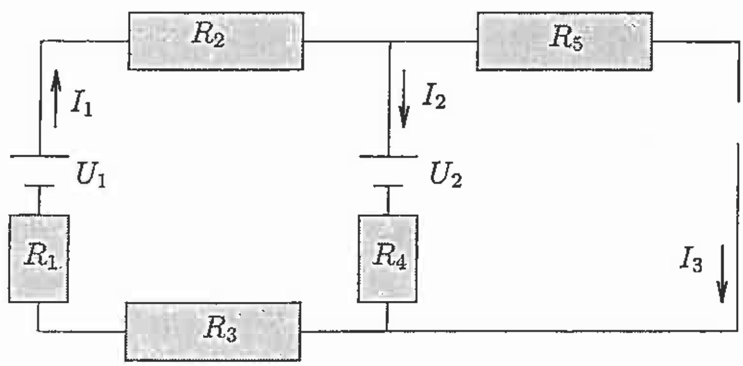
d) Zeigen Sie, dass diese Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 49

Die Matrix $\underline{B}$ besitze die beiden (einfachen) Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\underline{x}_1 = (1, -1)$ und $\underline{x}_2 = (1, 1)$. Wie lautet die Matrix $\underline{B}$?

Aufgabe 50

Im skizzierten Netzwerk sind die Widerstände $R_1, R_2, \ldots\ R_5$ und die Spannungen U_1, U_2 gegeben. Stellen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln ein Gleichungssystem für die unbekannten Ströme I_1, I_2, I_3 auf und ermitteln Sie diese Ströme.



6 Ergebnisse

1) $\underline{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{X} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{Y} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Lösungen

Dipl.-Math. M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

3) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $s = 4$

6) a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b) (13) c) existiert nicht

d) $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ e) existiert nicht f) $\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) existiert nicht h) existiert nicht i) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

k) existiert nicht l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ m) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

n) existiert nicht o) existiert nicht p) existiert nicht

q) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

7) Beweis durch Einsetzen

8) a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 3 \\ -x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 4x_2 &= 1 \end{aligned}$

9) Beweis durch Einsetzen 10) $d_{23} = 8 - 3q$ 11) $p = q$

12) $\underline{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 13) $\underline{A}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6a & 1 \end{pmatrix}$ 14) $\underline{B}^2 = \begin{pmatrix} xz & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & xz \end{pmatrix}$

15) $\{\, p = 1,\ q = -1\}$ oder $\{p = -1, q = 1\}$

16) $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 17) $c = -6$

18) a) $x_{1,2} = \dfrac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$; b) $y_1 = 2;\ y_2 = 3$;
c) $z_{1,2} = 1;\ z_3 = -2$

19) a) 1 ; b) 0 ; c) $-2x$ 20) a) 144 ; b) -315 21) $D = 4$

22) $x = \ln 3$ 23) $x = a\cos\alpha + b\sin\alpha$; $y = -a\sin\alpha + b\cos\alpha$

24) a) $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$; b) $\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$; c) $\underline{x}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$

Multiplikation mit den "Einheitsvektoren" liefert die Spalten der Matrix .

25) Lösungen existieren für $p = -3$; alle Punkte der Geraden $3x - 2y = 1$

26) a) Schnittpunkt $S(3/0)$; b) kein gemeinsamer Punkt

27) a) eindeutige Lösung $(2\ ;\ -\frac{5}{7}\ ;\ -\frac{11}{7})$ b) keine Lösung
c) unendlich viele Lösungen z.B. $(-2t + \frac{4}{7}\ ;\ t\ ;\ 2t - \frac{1}{7})$, $t \in R$

28) $p = -2$: Widerspruch, keine Lösung
$p = 1$: ∞ viele Lösungen $(1 - \lambda - \mu\ ;\ \mu\ ;\ \lambda)$, $\lambda, \mu \in R$
$p \neq 1$, $\neq -2$: eindeutige Lösung $\left(\dfrac{(p+1)^2}{p+2} , \dfrac{1}{p+2} , -\dfrac{p+1}{p+2} \right)$

29) $\underline{x} = (\lambda\ ,\ -\lambda\ ,\ \lambda\ ,\ -\lambda\ ,\ \lambda\ )$; $\lambda \in R$

30) a) $2p + 3q - r = 0$; b) $r = 2$ c) $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda \in R$

31) a) $p = 0$: $\underline{x} = (\lambda\ ,\ -2\lambda\ ,\lambda\ )^T$; $\lambda \in R$
b) $p_1 = 2$; $p_{2,3} = 1$. $p = 2 \longrightarrow$ $\underline{x} = (\lambda\ ,\ 2\lambda\ ,\ 3\lambda\ )^T$; $\lambda \in R$

32) a) $a = -3$ b) $a = 2$ (∞^1Lösungen, $r = 2$) c) $a \in R \setminus \{-3,\ 2\}$

33) a) $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$;

$\underline{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $\underline{B} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\underline{D} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\underline{z} = (\underline{C} \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D}) \cdot \underline{x} + \underline{C} \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{a} + \underline{b}$

$$\iff \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) $x_1 = \frac{8}{13}$; $x_2 = -\frac{2}{13}$; $x_3 = \frac{6}{13}$

34) $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$

35) $r = 4\lambda$, $s = 5\lambda$, $t = \lambda$; $\lambda \in R$

36) a) $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\underline{Y} = \underline{D} \cdot \underline{C}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$

37) Lösung: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$
Rechenaufwand bei b) am geringsten, bei c) am größten

38) a) $\underline{z} = (\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} \cdot \underline{x} = (\underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}) \cdot \underline{x}$

b) $\underline{z} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$

39) a) $a_{11}x_1^{\,2} + a_{22}x_2^{\,2} + a_{33}x_3^{\,2}$

b) $\underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{y}$ oder $\underline{y}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$

40) a) 3 Zeilen, 3 Spalten

b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\lambda_1 = 1$; $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{33})$

41) a) $a_{22} = 3$ b) $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda \in R$

42) Rg $\underline{A} = 3$ für $k \neq 0$; Rg $\underline{A} = 2$ für $k = 0$

43) Rg $\underline{A} =$ Rg $(\underline{A; b}) = 2$; Gl.system lösbar, ∞ viele Lösungen

44) Rg $\underline{A} = 3$; Rg $\underline{B} = 2$

45) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -10 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

46) $\underline{C}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\underline{D}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

47) a) Streckung von O aus mit dem Faktor 2

b) Bilddreieck $A^*(2/2)$; $B^*(8/2)$; $C^*(6/4)$

48) b) Eigenwerte $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = -6$

c) Eigenvektoren $\underline{x}_1 = p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\underline{x}_2 = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $p \in R$

d) Skalarprodukt $\underline{x}_1^T \cdot \underline{x}_2 = 0$

49) $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

50) $I_1 = -[R_4 U_1 + R_5(U_1 + U_2)] \;/\; D$

$I_2 = -[R_5(U_1 + U_2) + (R_1 + R_2 + R_3)U_2)] \;/\; D$

$I_3 = [(R_1 + R_2 + R_3)U_2 - R_4 U_1] \;/\; D$

mit $D = (R_1 + R_2 + R_3)(R_4 + R_5) + R_4 R_5$

6 Matrizen

6.1 Bezeichnungen

Eine (m,n)–Matrix A ist ein rechteckiges Zahlenschema, das aus $m \cdot n$ Zahlen – *Elemente* genannt – besteht, die in m *Zeilen* (Zeilenvektoren) und n *Spalten* (Spaltenvektoren) angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix} .$$

Das Element a_{ij} steht in der i–ten Zeile und in der j–ten Spalte.
i heißt *Zeilenindex* und j heißt *Spaltenindex*,
m heißt *Zeilenzahl* und n heißt *Spaltenzahl* der Matrix A.

6.1

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ ist eine $(3,2)$–Matrix aus 3 Zeilen und 2 Spalten, es ist z.B. $a_{21} = 2,\ a_{12} = -1$, die zweite Zeile (der zweite Zeilenvektor) ist $(2,3)$.

$B = (1 \ -1 \ 2)$ ist eine $(1,3)$–Matrix[12] aus 1 Zeile und 3 Spalten.

$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ ist eine (quadratische) $(2,2)$–Matrix.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine (symmetrische) $(3,3)$–Matrix.

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist die $(2,3)$–Nullmatrix.

Sind alle Elemente von A gleich 0, so heißt A eine **Nullmatrix**, Bez.[13]: O.
Ist $A = (a_{ij})$ eine (m,n)–Matrix , so heißt die (n,m)–Matrix $A^\top := (a_{ji})$ die zu A *transponierte* oder *gespiegelte* Matrix. Es ist $(A^\top)^\top = A$.
$A^\top$ geht aus A durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten hervor.

6.2 *Zu A, B, C, D, O des vorigen Beispiels bilde man die Transponierten:*

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^\top = (1,-1,2)^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$C^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad D^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = D, \quad O^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[12] Statt $(1 \ -1 \ 2)$ schreibt man auch $(1,-1,2)$.

[13] Gehen Zeilenzahl m und Spaltenzahl n nicht aus dem Zusammenhang hervor, müssen sie angegeben werden!