Übungsaufgaben für den 9.Tag

1) Leiten Sie ab:

   a) $f(x) = \sin(2x) : x$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 4x}}$

2) Bestimmen Sie:

   a) $\int (x^2 \cdot e^x)\, dx$

   b) $\int ((3x - 10) : (x^2 - 5x + 6))\, dx$

   c) $\int ((2x^3 - 20x + 33) : (x^2 + 2x - 8))\, dx$

   d) $\int ((5x^2 + 3x - 1) : (x^3 - 2x^2 + x - 2))\, dx$

   e) $\int (\ln x : x)\, dx$

   f) $\int \sin^2 x\, dx$

3) a) Das Schaubild von f mit $f(x) = \sin x$, die Geraden mit den Gleichungen $x=0$ und $x= 2\pi$ sowie die x-Achse begrenzen zwei Flächenstücke. Berechnen Sie den Gesamtinhalt der beiden Flächen.

   b) Die Schaubilder der Funktionen g und f mit $g(x) = 6$ und $f(x) = x^2 + 2$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

   c) Das Schaubild von f mit $f(x) = (2x^3 + 1) : x^2$, die Gerade $x=1$ und die schiefe Asymptote von f bilden ein nach rechts oben offenes Flächenstück. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

4) Wird die Kurve K mit der Gleichung $y = f(x)$ um die x-Achse gedreht, entsteht ein Rotationskörper. Für sein Volumen gilt:

   $$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

   Berechnen Sie auf diese Weise das Volumen

   a) eines Kegels mit Grundkreisradius $r = 2$ cm und Höhe $h = 5$cm

   b) einer Kugel mit Radius $r = 3$ cm

5) Die beiden Kurven mit den Gleichungen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ begrenzen mit der x-Achse ein Spitzbogendreieck.

   a) Wie weit sind die drei Winkel des Spitzbogendreiecks?
   b) Wie groß ist sein Flächeninhalt?

Lösungen zum Übungsblatt vom 3. Tag

1)

a) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$

$f'(x) = \frac{2 \cdot \cos(2x) \cdot x - 1 \cdot \sin(2x)}{x^2} = \frac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{x^2-4x}} = \frac{1}{4} \cdot (x^2-4x)^{-\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (x^2-4x)^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x-4)$

$= -\frac{2x-4}{12(x^2-4x) \cdot \sqrt[3]{x^2-4x}}$

$= -\frac{2(x-2)}{12x(x-4)\sqrt[3]{x^2-4x}} = -\frac{x-2}{6x(x-4)\sqrt[3]{x^2-4x}}$

2)

a) $\int (x^2 e^x)\,dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx$

$u(x) = x^2$	$u'(x) = 2x$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$= x^2 e^x - 2 \cdot \left[x \cdot e^x - \int e^x\,dx \right]$

$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

$= \underline{\underline{e^x(x^2 - 2x + 2) + C}}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 9. Tag

noch 2)

b) $$\int \frac{3x-10}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{3x-10}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

NR: $x^2-5x+6=0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$x_1 = 3;\ x_2 = 2$

$$= \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\,dx$$

$$= \int \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

$$= \int \frac{(A+B)x - 3A - 2B}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

Koeffizientenvergleich:

$$A + B = 3 \quad | \cdot 2$$
$$-3A - 2B = -10 \quad +$$

$$-A = -4$$
$$A = 4 \quad \text{also: } B = 3-4 = -1$$

$$= \int \frac{4}{x-2} + \frac{-1}{x-3}\,dx$$

$$= 4\ln|x-2| - \ln|x-3| + c$$

$$= \ln\left|\frac{(x-2)^4}{x-3}\right| + c$$

c) $$\int \frac{2x^3-20x+33}{x^2+2x-8}\,dx = \int 2x - 4 + \frac{4x+1}{x^2+2x-8}\,dx = *$$

NR: $(2x^3-20x+33) : (x^2+2x-8) = 2x - 4 + \frac{4x+1}{x^2+2x-8}$

$$\begin{array}{l} -(2x^3+4x^2-16x) \\ \hline -4x^2-4x+33 \\ -(-4x^2-8x+32) \\ \hline 4x+1 \end{array}$$

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+4)}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 9. Tag

noch 2c)

Nennerbetrachtung: $x^2+2x-8=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}$$

$x_1=2;\ x_2=-4$

$$* = \int 2x-4+\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+4)}\,dx$$

$$= \int 2x-4+\frac{A(x+4)+B(x-2)}{(x-2)(x+4)}\,dx$$

$$= \int 2x-4+\frac{(A+B)x+4A-2B}{(x-2)(x+4)}\,dx$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A+B &= 4 \quad |\cdot 2 \\ 4A-2B &= 1 \quad + \end{aligned}$$

$$6A = 9$$

$$A=\frac{3}{2}$$

$$B=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

$$= \int 2x-4+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}+\frac{\frac{5}{2}}{x+4}\,dx$$

$$= x^2-4x+\frac{3}{2}\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x+4|+C$$

$$= x^2-4x+\ln\left|(x-2)^{\frac{3}{2}}(x+4)^{\frac{5}{2}}\right|+C$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 9. Tag

noch 2

d) $\int \frac{5x^2+3x+4}{x^3-2x^2+x-2}\,dx = *$

Zerlegung des Nenners:

$x^3-2x^2+x-2=0$

Raten: $x_1=2$

Horner:

	1	-2	1	-2
		2	0	2
$\boxed{x=2}$	1	0	1	$\boxed{0}$

Also:

$x^3-2x^2+x-2=(x-2)(x^2+1)$

$$* = \int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)(x^2+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{(A+B)x^2+(-2B+C)x+A-2C}{(x-2)(x^2+1)}\,dx$$

Koeffizientenvergleich:

$A+B = 5 \Rightarrow A=5-B \quad (1)$

$-2B+C = 3 \Rightarrow C=3+2B \quad (2)$

$A-2C = 4 \quad (3)$

(1) und (2) in (3)

$5-B-6-4B=4$

$-5B=5$

$B=-1 \quad (4)$

(4) in (1):

$A=5-(-1)=6$

(4) in (2):

$C=3+2(-1)=1$

$$= \int\left(\frac{6}{x-2}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= 6\ln|x-2| - \frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+1}\,dx$$

$$= 6\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan x + C$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 9. Tag

noch 2)

e) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int z\,dz = \frac{1}{2}z^2 + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Substitution:}\\ z(x) = \ln x\\ z'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\\ dz = \frac{1}{x}\,dx\end{array}}$$

oder:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,dx = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x}\ln x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x}\\ v(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x}\end{array}}$$

Betrag unnötig, da $x > 0$

Also: $2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln(x))^2 + C^*$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

noch 2)

f) $\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin x \, dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \sin x & u'(x) = \cos x \\ v(x) = -\cos x & v'(x) = \sin x \end{array}}$$

$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$$

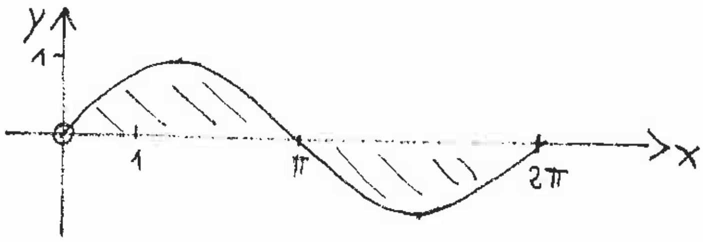
$$= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx$$

Also:

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x + C^*$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + C$$

3) a) $f(x) = \sin x$



$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right|$$

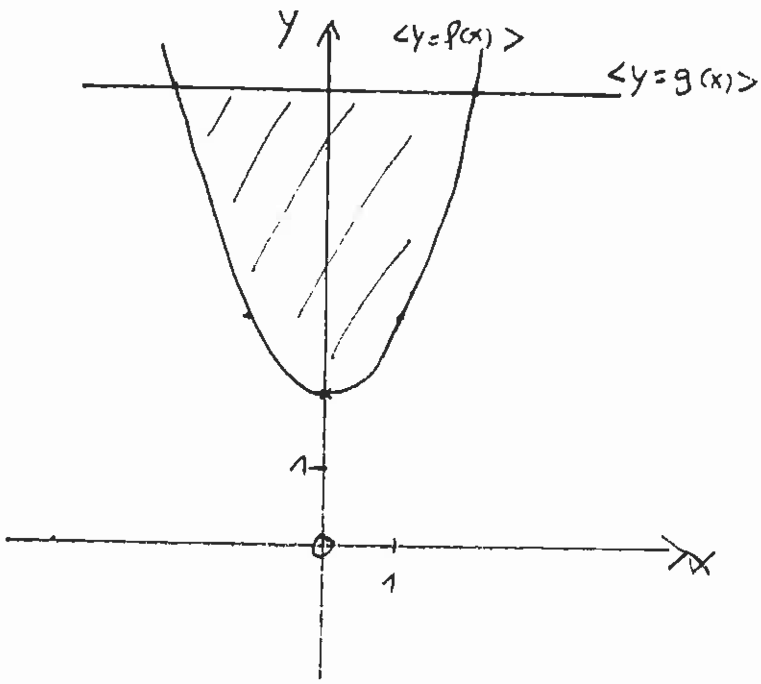
$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left| \left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} \right|$$

$$= 1 - (-1) + \left| -1 - (1) \right| = 2 + |-2| = \underline{\underline{4}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 9. Tag

noch 3)

b) $g(x) = 6$; $f(x) = x^2+2$



Berechnung der Schnittstellen:

Bed.: $f(x) = g(x)$

$$x^2+2 = 6 \quad |-2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} (6-(x^2+2))\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Achsen-} \\ \text{Symmetrie}}}{=} 2\cdot\int_0^2 (6-x^2-2)\,dx$$

$$= 2\cdot\int_0^2 (4-x^2)\,dx = 2\cdot\left[4x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2\cdot\left(8-\tfrac{8}{3}-0\right)$$

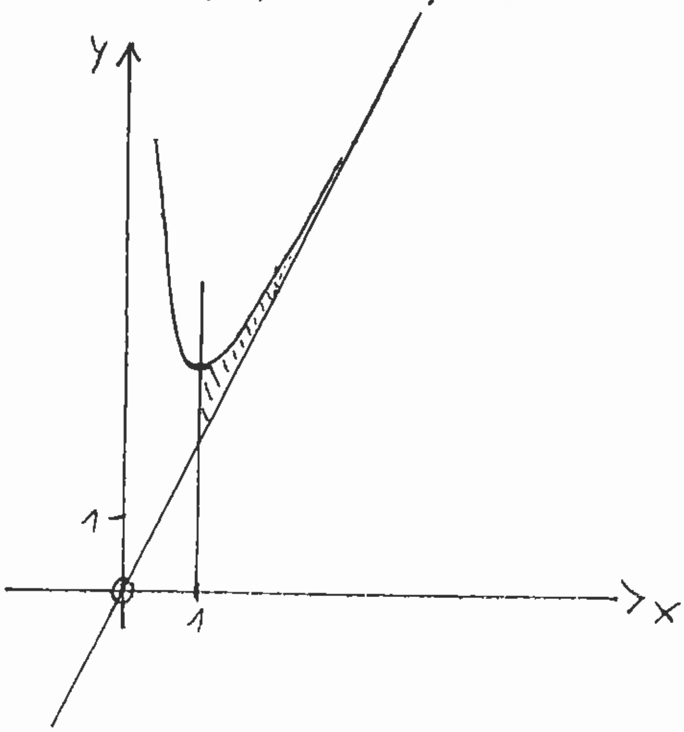
$$= \underline{\underline{\frac{32}{3} = 10\tfrac{2}{3}}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 9. Tag

noch 3

c) $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2} = 2x + \dfrac{1}{x^2}$

schiefe Asymptote: $y = 2x$



$$A = \int_1^\infty \left(\frac{2x^3+1}{x^2} - 2x\right) dx$$

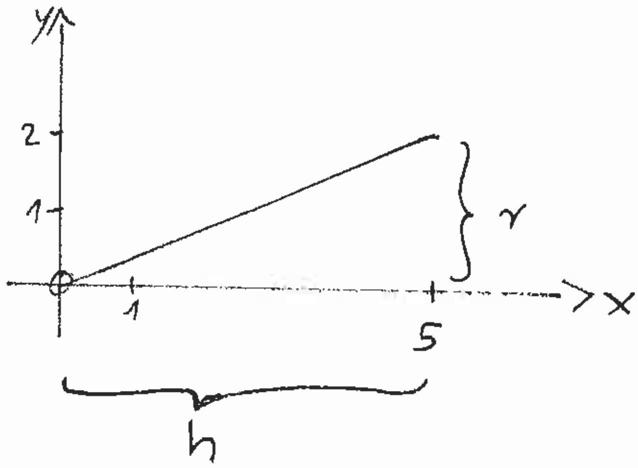
$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \left(2x + \frac{1}{x^2} - 2x\right) dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = \underline{\underline{1}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 9. Tag

4)

a) Kegel: $r = 2\,cm$; $h = 5\,cm$



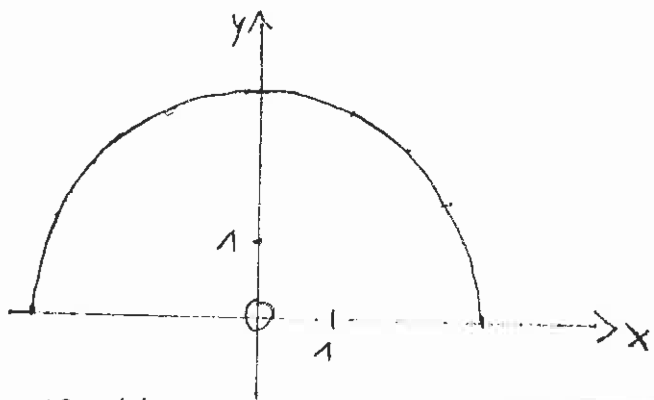
$$y = \frac{r}{h} x = \frac{2}{5} x$$

Randfunktion: $f(x) = \frac{2}{5} x$

$$V = \pi \int_0^5 \left(\tfrac{2}{5}x\right)^2 dx = \pi \int_0^5 \frac{4x^2}{25}\, dx = \pi \left[\frac{4}{3 \cdot 25} x^3 \right]_0^5$$

$$= \pi \left(\frac{4 \cdot 125}{3 \cdot 25} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{20}{3}\pi}} \quad (cm^3)$$

b) Kugel: $r = 3\,cm$



Randfunktion:

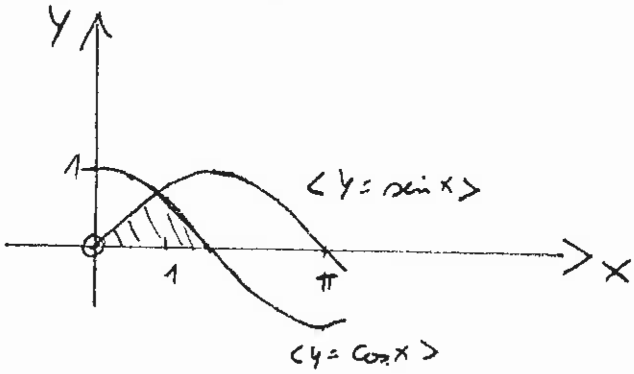
$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^3 (9 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \left[9x - \tfrac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = 2\pi (27 - 9 - 0) = \underline{\underline{36\pi}} \quad (cm^3)$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 9. Tag

5)



Schnittstelle: Bed.: $\sin x = \cos x$

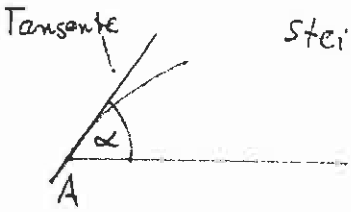
D.h. $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1$ $\quad \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}}$

a) Winkelberechnung

Es sei: $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$

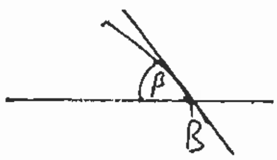
$f'(x) = \cos x$; $g'(x) = -\sin x$

Skizze:



Steigung: $m = f'(0) = \cos 0 = 1 = \tan\alpha$

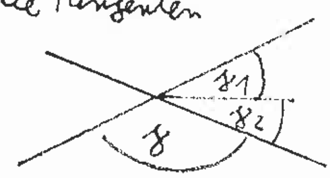
$\underline{\underline{\alpha = 45°}}$



$m = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Darmit $\underline{\underline{\beta = 45°}}$

Nur die Tangenten



$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \arctan\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 35{,}264° \\ \gamma_2 &= \left|\arctan\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right| = 35{,}264° \end{aligned}\right\} \gamma = 180° - (\gamma_1 + \gamma_2) = \underline{\underline{109{,}472°}}$$

$\approx 109{,}5°$

Lösungen zum Übungsblatt vom 9. Tag :

noch 5

a) $\alpha = 45°; \quad \beta = 45°; \quad \gamma = 109{,}5°$

Achtung: Die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ gilt hier nicht.

b)
$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \underline{\underline{2 - \sqrt{2}}}$$