Alles ohne TR

Übungsaufgaben für den 8.Tag

1) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangente und der Normalen an das Schaubild von f im Punkt B.
   $f(x) = (2 - 4x)^3(1 - x)$; B(0,5 / ?)

2) Von R(0 / 4) aus werden Tangenten an das Schaubild von f mit
   $f(x) = x : (x - 3)$ gelegt. Berechnen Sie die Koordinaten der Berührpunkte und geben Sie die Gleichungen der Tangenten an.

3) Bestimmen Sie

   a) $\int x\, e^x\, dx$

   b) $\int (4x - 3)^2\, dx$

   c) $\int (2x + 5)^{11}\, dx$

4) a) Zeichnen Sie das Schaubild von $f(x) = \sin x + \cos x$.
   Zeichnen Sie dafür zuerst die Schaubilder von sin x und von cos x und addieren Sie die Ordinaten.
   Zeigen Sie, dass die Funktion f identisch ist mit der Funktion g mit
   $g(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \pi/4)$
   b) Stellen Sie ebenso f mit $f(x) = \sin x - \cos x$ in der Form $f(x) = a \cdot \sin(x+b)$ dar.

5) Bestimmen Sie die Lösungsmenge:
   $|x-3| + |2x - 7| = 11$

6) Diskutieren Sie die Funktion f mit

   $f(x) = 3 \sin x : (2 - \cos x)$

7) Aus „Die Rheinpfalz am Sonntag" vom 29.06.2008

Logisch!

4 9 5 1	18 8 5 2
9 14 16 3	4

A	B	C
6 5 18 4	21 4 5 12	6 1 12 26

KURZ NACHGEDACHT
Nur einer der drei Kästen A, B und C passt logischerweise in das offene Feld des Quadrates. Versuchen Sie die Regel zu erkennen, nach der die Figuren von 1, 2 und 3 aufgebaut sind. Dann kennen Sie die Lösung.

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

1)

$f(x) = (2-4x)^3(1-x)$; $B(0{,}5/?)$

$f(0{,}5) = (2-2)^3(1-0{,}5) = 0$ $\qquad \underline{\underline{B(0{,}5/0)}}$

$f'(x) = 3(2-4x)^2 \cdot (-4)(1-x) + (2-4x)^3 \cdot (-1)$

$f'(0{,}5) = 3(2-2)^2 \cdot (-4)(1-0{,}5) + (2-2)^3 \cdot (-1) = 0$

Tangente: $\underline{\underline{y = 0}}$

Normale: $\underline{\underline{x = 0{,}5}}$

2) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$; $R(0/4)$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-3) - 1 \cdot x}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{(x-3)^2}$$

Berührpunkt $B(x_B / f(x_B))$

Die Tangentensteigung ist ~~so~~

1. $m = f'(x_B) = \dfrac{-3}{(x_B-3)^2}$

2. $m = m_{BR} = \dfrac{f(x_B) - 4}{x_B - 0} = \dfrac{\frac{x_B}{x_B-3} - 4}{x_B} = \dfrac{x_B - 4(x_B-3)}{(x_B-3) \cdot x_B}$

$= \dfrac{-3x_B + 12}{(x_B-3) \cdot x_B}$ $\qquad x_B \neq 0$

Gleichgesetzt:

$$-\frac{3}{(x_B-3)^2} = \frac{-3x_B + 12}{(x_B-3) \cdot x_B} \quad \Big| \cdot (x_B-3)^2 \cdot x_B$$

$$-3x_B = (-3x_B + 12)(x_B - 3)$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

noch 2)

$$-3x_B = -3x_B^2 + 9x_B + 12x_B - 36$$

$$3x_B^2 - 24x_B + 36 = 0 \quad |:3$$

$$x_B^2 - 8x_B + 12 = 0$$

$$x_{B_{1,2}} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$x_{B_1} = 6 \qquad x_{B_2} = 2$$

$$f(6) = \frac{6}{6-3} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \underline{\underline{B_1(6|2)}}$$

$$f(2) = \frac{2}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2 \qquad \underline{\underline{B_2(2|-2)}}$$

$$f'(6) = \frac{-3}{(6-3)^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$f'(2) = \frac{-3}{(2-3)^2} = \frac{-3}{1} = -3$$

Tangente 1 $\quad t_1: \; 2 = -\frac{1}{3} \cdot 6 + c \Rightarrow c = 4$

$$\underline{\underline{t_1: \; y = -\frac{1}{3}x + 4}}$$

Tangente 2 $\quad t_2: \; -2 = -3 \cdot 2 + c \Rightarrow c = 4$

$$\underline{\underline{t_2: \; y = -3x + 4}}$$

3)

a) $\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x \; ; & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x \; ; & v(x) = e^x \end{array}}$$

$$= \underline{\underline{e^x \cdot (x-1) + C}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

noch 3)

b) $\int (4x-3)^2\,dx = \int u^2 \cdot \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{12}u^3 + C$

$= \frac{1}{12}(4x-3)^3 + C$

Substitution:

$4x-3 = u(x)$

$u'(x) = 4 = \frac{du}{dx}$

$dx = \frac{1}{4}\,du$

oder:

$\int (4x-3)^2\,dx = \int (16x^2 - 24x + 9)\,dx = \frac{16}{3}x^3 - 12x^2 + 9x + C$

c) $\int (2x+5)^{11}\,dx = u^{11} \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{24}u^{12} + C$

$= \frac{1}{24}(2x+5)^{12} + C$

Substitution:

$2x+5 = u(x)$

$u'(x) = 2 = \frac{du}{dx}$

$dx = \frac{1}{2}\,du$

4) $f(x) = x^2$; $g(x) = -x^2 + 4$

Schnittstellen: Bed.: $f(x) = g(x)$

$x^2 = -x^2 + 4$

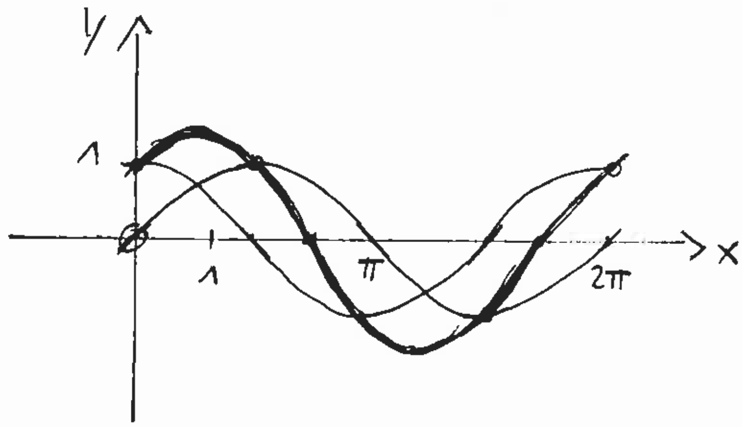
$2x^2 = 4$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

4) a) $f(x) = \sin x + \cos x$



$$g(x) = \sqrt{2}\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\sin x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot [\sin x + \cos x]$$

$$= \underline{\underline{\sin x + \cos x}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

4b) $f(x) = \sin x - \cos x = \sin x + (-\cos x) \quad | : \alpha$

$$\frac{f(x)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sin x + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\cos x$$

$$\frac{1}{\alpha} = \cos y \qquad -\frac{1}{\alpha} = \sin y$$

Da $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = 1$$

$$\frac{2}{\alpha^2} = 1$$

$$\alpha^2 = 2 \qquad \alpha = \underset{(-)}{+}\sqrt{2}$$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$: $\quad y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder
$y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\sin y = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$: $\quad y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder
$y = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Übereinstimmung bei:

$$y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\frac{f(x)}{\sqrt{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin x + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\underline{\underline{f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}}$$

Lösung der Gleichung:

$$\underline{a \sin x + b \cos x = c}$$

mit Hilfe des Additionstheorems: ($\sin(x+y) = \cos y \sin x + \sin y \cos x$)

$$a \sin x + b \cos x = c \quad |:d$$

$$\frac{a}{d} \sin x + \frac{b}{d} \cos x = \frac{c}{d}$$

Wir fordern:

$$\frac{a}{d} = \cos y \qquad \frac{b}{d} = \sin y$$

Da $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ folgt: $\frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2+b^2}{d^2} = 1$

Also $d^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

$$d_1 = \sqrt{a^2+b^2} \; ; \qquad d_2 = -\sqrt{a^2+b^2}$$

Mit d_1: (Mit d_2 stehen <u>überall</u> „-"-Zeichen)

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (*)$$

Wir müssen nun das y so finden, dass $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos y$ und $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin y$

Dann gilt: $(*) = \sin(x+y) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Diese Gleichung ist lösbar, falls $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| < 1$

Bsp.: Ü-Blatt 7. Tag 4c

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$$

$a = \sqrt{3}$; $b = -1$; $c = 2$

$$\cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-1}{\sqrt{3+1}} = -\frac{1}{2}$$

$\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ d.h. $y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

alternativ: wo liegt $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \middle| -\frac{1}{2}\right)$ auf dem Einheitskreis?

oder $y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$\sin y = -\frac{1}{2}$ d.h. $y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

oder $y = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Vergleich: $y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{6}\pi = \underline{\underline{\frac{2}{3}\pi}} \in \left]-\pi; \pi\right]$$

$$\cancel{x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi}$$

(Allg.: $\underline{\underline{x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}}}$)

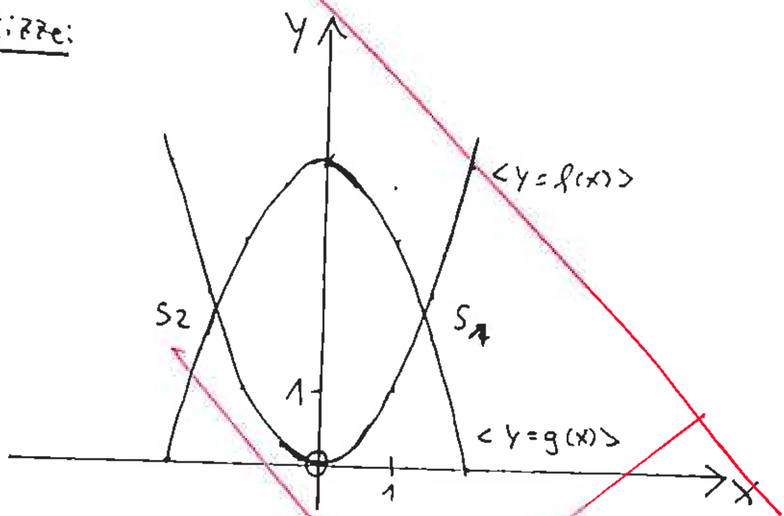
Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

~~noch 4)~~

$f(\sqrt{2}) = 2$; $f(-\sqrt{2}) = 2$

Schnittpunkte: $S_1(\sqrt{2}/2)$ $S_2(-\sqrt{2}/2)$

Skizze:



$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} [\underbrace{(-x^2+4)}_{g(x)} - \underbrace{x^2}_{f(x)}] \, dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (-2x^2+4) \, dx$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{2}{3} x^3 + 4x \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\left(-\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 0\right)$$

$$= 2\left(-\frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{12}{3}\sqrt{2} \right) = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

5)

$$|x-3| + |2x-7| = 11$$

Der 1. Betrag wird 0 bei $x = 3$

Der 2. Betrag wird 0 bei $x = \frac{7}{2}$

1. Fall: $x \geqq \frac{7}{2}$:

$$x - 3 + 2x - 7 = 11$$
$$3x = 21$$
$$x = 7 \qquad L_1 = \{7\}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

noch 5)

2. Fall: $3 \le x < \frac{7}{2}$:

$$x-3-(2x-7)=11$$
$$x-3-2x+7=11$$
$$-x=7$$
$$x=-7 \qquad L_2=\{\}$$

3. Fall: $x<3$:

$$-(x-3)-(2x-7)=11$$
$$-x+3-2x+7=11$$
$$-3x=1$$
$$x=-\frac{1}{3} \qquad L_3=\{-\tfrac{1}{3}\}$$

$$L=L_1\cup L_2\cup L_3=\{-\tfrac{1}{3};\ 7\}$$

6)

$$f(x)=3\sin x:(2-\cos x)=\frac{3\sin x}{2-\cos x}$$

Definitionsmenge: $D=\mathbb{R}$

Nullstellen: Bed.: $f(x)=0$

$$\sin x=0 \qquad x=k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Ableitungen:

$$f'(x)=\frac{3\cos x(2-\cos x)-\sin x\cdot 3\sin x}{(2-\cos x)^2}$$

$$=\frac{6\cos x-3\cos^2 x-3\sin^2 x}{(2-\cos x)^2}=\frac{6\cos x-3}{(2-\cos x)^2}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag...

noch 6)

$$f''(x) = \frac{-6\sin x\,(2-\cos x)^2 - 2(2-\cos x)\cdot\sin x\cdot(6\cos x - 3)}{(2-\cos x)^4}$$

$$= \frac{-6\sin x(2-\cos x) - 2\sin x\cdot(6\cos x - 3)}{(2-\cos x)^3}$$

$$= \frac{-12\sin x + 6\sin x\cos x - 12\sin x\cos x + 6\sin x}{(2-\cos x)^3}$$

$$= \frac{-6\sin x - 6\sin x\cos x}{(2-\cos x)^3}$$

Extrempunkte: notw. Bed.: $f'(x)=0$

$$6\cos x - 3 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{oder } x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$$

weitere Untersuchung:

$$f''\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) = \frac{-6\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - 6\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}}{(2-\frac{1}{2})^3} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) = \frac{3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{H\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \sqrt{3}\right)}}$$

$$f''\left(\frac{5}{3}\pi+2k\pi\right) = \frac{-6\cdot(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) - 6\cdot(-\frac{1}{2}\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}}{(2-\frac{1}{2})^3} > 0$$

$$f\left(\frac{5}{3}\pi+2k\pi\right) = \frac{3\cdot(-\frac{1}{2}\sqrt{3})}{2-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{T\left(\frac{5}{3}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \middle|\ -\sqrt{3}\right)}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

noch 6)

Wendepunkte: notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$-6\sin x - 6\sin x\cos x = -6\sin x(1 + \cos x) \stackrel{!}{=} 0$$

$\sin x = 0$; d.h. $x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

oder

$\cos x = -1$; d.h. $x = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Insgesamt: $x = k\pi$

weitere Untersuchung:

$$f'''(x) = \frac{-6(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)(2-\cos x)^3 - 3\cdot(2-\cos x)^2 \cdot \sin x \cdot (-6\sin x - 6\sin x\cos x)}{(2-\cos x)^6}$$

$$= \frac{-6\left[(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)(2-\cos x)\right] - 3\cdot\sin x\cdot(-6)(\sin x + \sin x\cos x)}{(2-\cos x)^4}$$

$$= \frac{-6(2\cos x - \cos^2 x + 2\cos^2 x - \cos^3 x - 2\sin^2 x + \sin^2 x\cos x] + 18(\sin^2 x + \sin^2 x\cos x)}{(2-\cos x)^4}$$

$$= -6\cdot\frac{2\cos x + \cos^2 x - \cos^3 x - 2\sin^2 x + \sin^2 x\cos x \mp 3\sin^2 x \mp 3\sin^2 x\cos x}{(2-\cos x)^4}$$

$$\left(= -6\cdot\frac{2\cos x + \cos^2 x - \cos^3 x + \sin^2 x + 4\sin^2 x\cos x}{(2-\cos x)^4} \right.$$

$$\left. = -6\cdot\frac{2\cos x + 1 - \cos^3 x + 4\sin^2 x\cdot\cos x}{(2-\cos x)^4} \right)$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

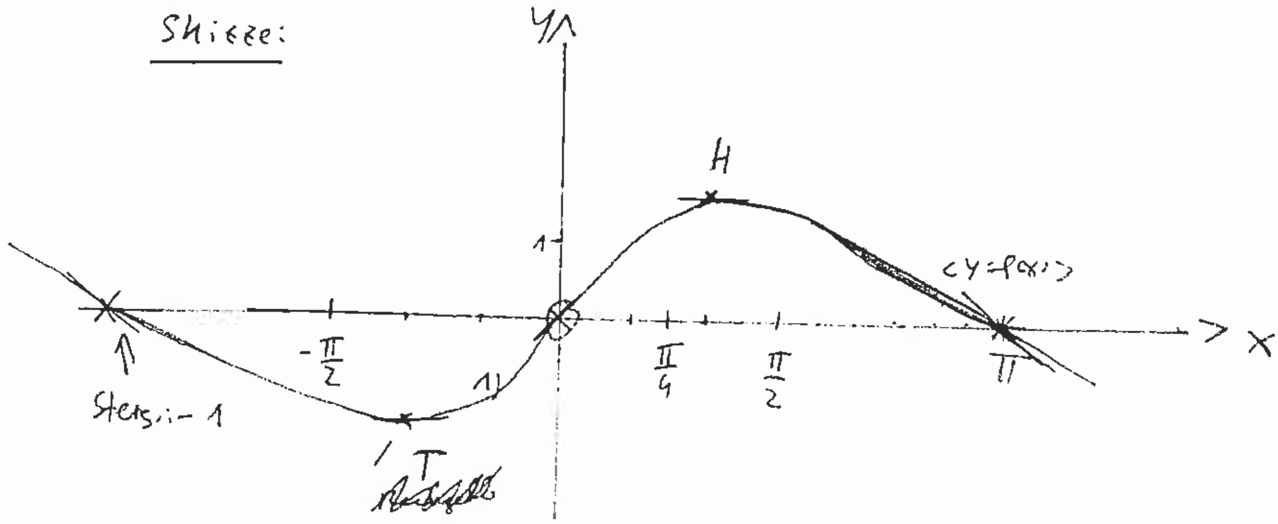
noch 6)

$$f'''(k\pi) = -6 \cdot \frac{2\cdot(-1)^k + 1 + (-1)^k + 0}{(2-(-1)^k)^4} \neq 0$$

$$f(k\pi) = \frac{3 \cdot 0}{(2 \pm 1)} = 0$$

$W(k\pi; 0)$; $k \in \mathbb{Z}$

Skizze:



Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{3\sin(-x)}{2-\cos(-x)} = \frac{-3\sin x}{2-\cos x} = -f(x)$$

Also: Punktsymmetrie bzgl. $O(0/0)$

Lösungen zum Übungsblatt vom 8. Tag

2. Möglichkeit:

6) $$f(x) = \frac{3\sin x}{2-\cos x} \qquad D = \mathbb{R}$$

Nullstellen: $x = k\cdot\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{3\cos x\cdot(2-\cos x) - 3\sin x\cdot\sin x}{(2-\cos x)^2} = \frac{6\cos x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x}{(2-\cos x)^2}$$

$$= \frac{6\cos x - 3}{(2-\cos x)^2} = 6\cdot\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{(2-\cos x)^2}$$

Der Nenner ist stets positiv:

Vorzeichen von f':

$+ \quad -\frac{5}{3}\pi \quad - \quad -\frac{\pi}{3} \quad + \quad 0 \quad \frac{\pi}{3} \quad - \quad \pi \quad \frac{5}{3}\pi \quad + \quad 2\pi \quad \frac{7}{3}\pi \quad -$ usw.

über VZW

$\Rightarrow \quad T\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,/\, -\sqrt{3}\right) \qquad H\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,/\, \sqrt{3}\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$

2. Ableitung:

$$f''(x) = 6\cdot\frac{-\sin x\,(2-\cos x)^2 - 2\,(2-\cos x)\cdot\sin x\,(\cos x - \frac{1}{2})}{(2-\cos x)^4}$$

$$= 6\cdot\frac{-\sin x\cdot(2-\cos x) - 2\cdot\sin x\,(\cos x - \frac{1}{2})}{(2-\cos x)^3}$$

$$= -6\cdot\frac{\sin x\cdot[\,2 - \cos x + 2\cos x - 1\,]}{(2-\cos x)^3}$$

$$= -6\cdot\frac{\sin x\cdot[\,\cos x + 1\,]}{(2-\cos x)^3}$$

Der Nenner ist stets positiv. Vorzeichen von f'': $\qquad W(k\pi/0);\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos x + 1 \geq 0$

$- \quad -\pi \quad + \quad 0 \quad - \quad \pi \quad + \quad 2\pi \quad - \quad x$

Skizze -> 8