Übungsaufgaben für den 7.Tag

1) Leiten Sie ab:

a) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{2x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x} : (x + 1)$

c) $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \ln x$

2) Führen Sie eine Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) durch.
Untersuchen Sie auf:Definitionsmenge, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte und Asymptoten, Symmetrie! Skizze! f(x) = ...
Die Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu bearbeiten. Bei c) darf $\sqrt{6}$ im Ergebnis stehen bleiben.

a) $\dfrac{-3x^3 + 4x + 16}{4x^2}$

b) $\dfrac{x^2 - 4}{1 - x^2}$

c) $(x^3 - 2x^2 - 5x-12) : (x^2 -5x + 4)$

d) $2/3\ x^3 - x^2 - 4x - 7/3$

3) Skizzieren Sie die Menge $x^2 - 10x + 4y + y^2 < 20$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

4) Bestimmen Sie im Intervall $]-\pi ; \pi]$ (zuerst ohne Taschenrechner) alle Lösungen von
a) $\tan((x-1)/x) = 1/\sqrt{3}$
b) $4 \sin(x) - 2 = 0$
c) $\sqrt{3} \cdot \sin(x) - \cos(x) = 2$
d) $\log_x(16) = -4$

5) Leiten Sie ab:
a) $f(x) = 4^{-x}$
b) $f(x) = \ln(ax)$
c) $f(x) = \log_{10}(x)$
d) $f(x) = x^3(2 \cdot \ln(x) - 1)$
e) $f(x) = \ln(\cos x)$

6) In einen Halbkreis mit Radius r soll ein gleichschenkliges Trapez eingezeichnet werden, und zwar so, dass die größere der beiden parallelen Seiten mit dem Durchmesser des Halbkreises zusammenfällt. Der Flächeninhalt des Trapezes soll ein Maximum annehmen. Zeichnen Sie dieses optimale Trapez !

7) Ein zylinderförmiger Blechbecher habe das Volumen V. Wie groß muss man den Radius und die Höhe wählen, damit der Blechverbrauch minimal ist?

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

1) a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2x - 1}$

$$f'(x) = \frac{4x^3(2x-1) - 2(x^4-1)}{(2x-1)^2} = \frac{8x^4 - 4x^3 - 2x^4 + 2}{(2x-1)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{6x^4 - 4x^3 + 2}{(2x-1)^2}}}$$

b) $f(x) = \sqrt{x} : (x+1) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+1) - 1 \cdot \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}}}$$

c) $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \ln x$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x \cdot \ln x + x \cdot \cos x \cdot \ln x + x \cdot \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \underline{\underline{\sin x \cdot \ln x + x \cdot \cos x \cdot \ln x + \sin x}}$$

[Anmerkung: $(u \cdot v \cdot w)' = ((u \cdot v) \cdot w)' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w'$

$= [u'v + uv'] \cdot w + (u \cdot v) \cdot w'$

$= u'vw + uv'w + uvw'$]

2) a) $f(x) = \dfrac{-3x^3 + 4x + 16}{4x^2}$

Definitionsmenge: $4x^2 \neq 0$; $x \neq 0$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Nullstellen: Bed.: $f(x) = 0$

$-3x^3 + 4x + 16 = 0$

Raten einer Nullstelle: $x_1 = 2$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2a) Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(-3x^3+4x+16):(x-2) = -3x^2-6x-8 \\
-(-3x^3+6x^2) \\
\hline
\quad -6x^2+4x+16 \\
-(-6x^2+12x\quad) \\
\hline
\qquad -8x+16 \\
\qquad -(-8x+16) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

weitere Untersuchung:

$-3x^2-6x-8=0$

$$x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-96}}{-6} \notin R$$

Nullstelle: $x=2$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{(-9x^2+4)\cdot 4x^2 - (-3x^3+4x+16)\cdot 8x}{16x^4}$$

$$= \frac{-36x^4+16x^2+24x^4-32x^2-128x}{16x^4}$$

$$= \frac{-12x^4-16x^2-128x}{16x^4} = \frac{-4x(3x^3+4x+32)}{16x^4}$$

$$= -\frac{3x^3+4x+32}{4x^3}$$

Alternative: $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{24}{x^4} = \frac{2x+24}{x^4}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4} - \frac{96}{x^5} = \frac{-6x-96}{x^5}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2a)

Extremstellen: (-punkte) notw. Bed.: $f'(x)=0$

$$3x^3+4x+32=0$$

Raten einer Nullstelle: $x_4=-2$

Horner-Schema:

	3	0	4	32
$\boxed{-2}$		-6	12	-32
	3	-6	16	0 = f(-2)

weitere Untersuchung:

$$3x^2-6x+16=0$$

$$x_{5,6}=\frac{6\pm\sqrt{36-192}}{6}\notin\mathbb{R}$$

Kandidat: $x_4=-2$

weitere Untersuchung:

$$f''(-2)=\frac{-4+24}{16}>0$$

$$f(-2)=\frac{32}{16}=2$$

Also: $T(-2/2)$

Wendepunkte: notw. Bed.: $f''(x)=0$

$$2x+24=0$$

$$x_7=-12$$

weitere Untersuchung:

$$f'''(-12)=\frac{72-96}{(-12)^5}>0$$

$$f(-12)=\frac{3\cdot 12^3-4\cdot 12+16}{4\cdot 144}=\frac{4(3^2\cdot 144-12+4)}{4\cdot 144}$$

$$=\frac{9\cdot 144-8}{144}=\frac{8\cdot(9\cdot 18-1)}{8\cdot 18}=\frac{161}{18}=8\frac{17}{18}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2a)

Also: $W(-12 / 8\frac{17}{18})$

Asymptoten:

$x=0$ ist Pol ohne VZW

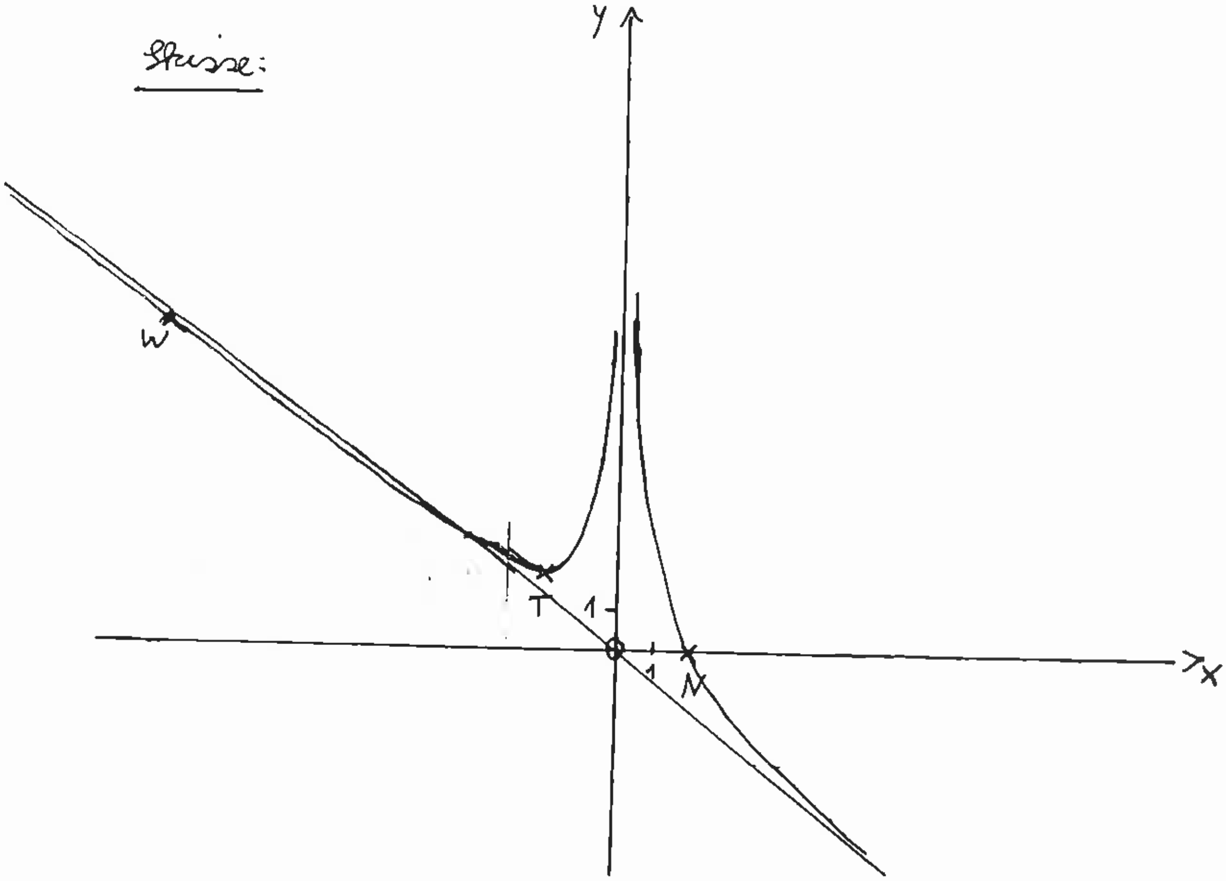
senkr. Asymptote $x=0$

Da $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$ folgt

Schiefe Asymptote $y = -\frac{3}{4}x$

Symmetrie: keine Symmetrie erkennbar.

Skizze:



Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

nach 2

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{1-x^2}$

Definitionsmenge: $x^2 \neq 1$ d.h. $x \neq \pm 1$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

Nullstellen: Bed.: $f(x)=0$

$x^2-4=0$ $\quad x_1 = 2 \quad x_2=-2$

Ableitungen: $f'(x) = \dfrac{2x(1-x^2)-(-2x)(x^2-4)}{(1-x^2)^2}$

$= \dfrac{2x-2x^3+2x^3-8x}{(1-x^2)^2}$

$= \dfrac{-6x}{(1-x^2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-6(1-x^2)^2-2(1-x^2)(-2x)(-6x)}{(1-x^2)^4}$

$= \dfrac{-6(1-x^2) - 24x^2}{(1-x^2)^3}$

$= \dfrac{-6+6x^2-24x^2}{(1-x^2)^3} = \dfrac{-6-18x^2}{(1-x^2)^3}$

Extrempunkte: notw. Bed.: $f'(x)=0$

$-6x=0 \qquad x=0$

weitere Untersuchung: $f''(0) = \dfrac{-6}{1^3} < 0$

$f(0) = \dfrac{-4}{1} = -4$

Also $H(0|-4)$

Übungsaufgaben für den 7.Tag

1) Leiten Sie ab:

   a) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{2x-1}$

   b) $f(x) = \sqrt{x} : (x + 1)$

   c) $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \ln x$

2) Führen Sie eine Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) durch.
   Untersuchen Sie auf:Definitionsmenge, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte und Asymptoten, Symmetrie! Skizze! f(x) = ...
   Die Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu bearbeiten. Bei c) darf $\sqrt{6}$ im Ergebnis stehen bleiben.

   a) $\dfrac{-3x^3 + 4x + 16}{4x^2}$

   b) $\dfrac{x^2 - 4}{1 - x^2}$

   c) $(x^3 - 2x^2 - 5x-12) : (x^2 -5x + 4)$

   d) $2/3\ x^3 - x^2 - 4x - 7/3$

3) Skizzieren Sie die Menge $x^2 - 10x + 4y + y^2 < 20$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

4) Bestimmen Sie im Intervall $]-\pi ; \pi]$ (zuerst ohne Taschenrechner) alle Lösungen von
   a) $\tan ((x-1)/x) = 1/\sqrt{3}$
   b) $4 \sin(x) -2 = 0$
   c) $\sqrt{3} \cdot \sin(x) - \cos(x) = 2$
   d) $\log_x(16) = -4$

5) Leiten Sie ab:
   a) $f(x) = 4^{-x}$
   b) $f(x) = \ln(ax)$
   c) $f(x) = \log_{10}(x)$
   d) $f(x) = x^3(2\cdot \ln(x) -1)$
   e) $f(x) = \ln(\cos x)$

6) In einen Halbkreis mit Radius r soll ein gleichschenkliges Trapez eingezeichnet werden, und zwar so, dass die größere der beiden parallelen Seiten mit dem Durchmesser des Halbkreises zusammenfällt. Der Flächeninhalt des Trapezes soll ein Maximum annehmen. Zeichnen Sie dieses optimale Trapez !

7) Ein zylinderförmiger Blechbecher habe das Volumen V. Wie groß muss man den Radius und die Höhe wählen, damit der Blechverbrauch minimal ist?

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

1) a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2x - 1}$

$$f'(x) = \frac{4x^3(2x-1) - 2(x^4-1)}{(2x-1)^2} = \frac{8x^4 - 4x^3 - 2x^4 + 2}{(2x-1)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{6x^4 - 4x^3 + 2}{(2x-1)^2}}}$$

b) $f(x) = \sqrt{x} : (x+1) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+1) - 1 \cdot \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}}}$$

c) $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \ln x$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x \cdot \ln x + x \cdot \cos x \cdot \ln x + x \cdot \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \underline{\underline{\sin x \cdot \ln x + x \cdot \cos x \cdot \ln x + \sin x}}$$

[Anmerkung: $(u \cdot v \cdot w)' = ((u \cdot v) \cdot w)' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w'$

$= [u'v + uv'] \cdot w + (u \cdot v) \cdot w'$

$= u'vw + uv'w + uvw'$]

2) a) $f(x) = \dfrac{-3x^3 + 4x + 16}{4x^2}$

Definitionsmenge: $4x^2 \neq 0$; $x \neq 0$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Nullstellen: Bed.: $f(x) = 0$

$-3x^3 + 4x + 16 = 0$

Raten einer Nullstelle: $x_1 = 2$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2a) Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(-3x^3+4x+16):(x-2) = -3x^2-6x-8 \\
-(-3x^3+6x^2) \\
\hline
\quad -6x^2+4x+16 \\
-(-6x^2+12x\quad) \\
\hline
\qquad -8x+16 \\
\quad -(-8x+16) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

weitere Untersuchung:

$$-3x^2-6x-8 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-96}}{-6} \notin \mathbb{R}$$

Nullstelle: $x = 2$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{(-9x^2+4)\cdot 4x^2 - (-3x^3+4x+16)\cdot 8x}{16x^4}$$

$$= \frac{-36x^4+16x^2+24x^4-32x^2-128x}{16x^4}$$

$$= \frac{-12x^4-16x^2-128x}{16x^4} = \frac{-4x(3x^3+4x+32)}{16x^4}$$

$$= -\frac{3x^3+4x+32}{4x^3}$$

Alternative: $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{24}{x^4} = \frac{2x+24}{x^4}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4} - \frac{96}{x^5} = \frac{-6x-96}{x^5}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2a)

Extremstellen: notw. Bed.: $f'(x)=0$
(-punkte)

$$3x^3+4x+32=0$$

Raten einer Nullstelle: $x_4=-2$

Horner-Schema:

3	0	4	32
$\boxed{-2}$	-6	12	-32
3	-6	16	0 = f(-2)

weitere Untersuchung:

$$3x^2-6x+16=0$$

$$x_{5,6}=\frac{6\pm\sqrt{36-192}}{6}\notin\mathbb{R}$$

Kandidat: $x_4=-2$

weitere Untersuchung:

$$f''(-2)=\frac{-4+24}{16}>0$$

$$f(-2)=\frac{32}{16}=2$$

Also: $T(-2/2)$

Wendepunkte: notw. Bed.: $f''(x)=0$

$$2x+24=0$$

$$x_7=-12$$

weitere Untersuchung:

$$f'''(-12)=\frac{72-96}{(-12)^5}>0$$

$$f(-12)=\frac{3\cdot 12^3-4\cdot 12+16}{4\cdot 144}=\frac{4(3^2\cdot 144-12+4)}{4\cdot 144}$$

$$=\frac{9\cdot 144-8}{144}=\frac{8\cdot(9\cdot 18-1)}{8\cdot 18}=\frac{161}{18}=8\frac{17}{18}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2a)

Also: $W(-12 / 8\frac{17}{18})$

Asymptoten:

$x=0$ ist Pol ohne VZW

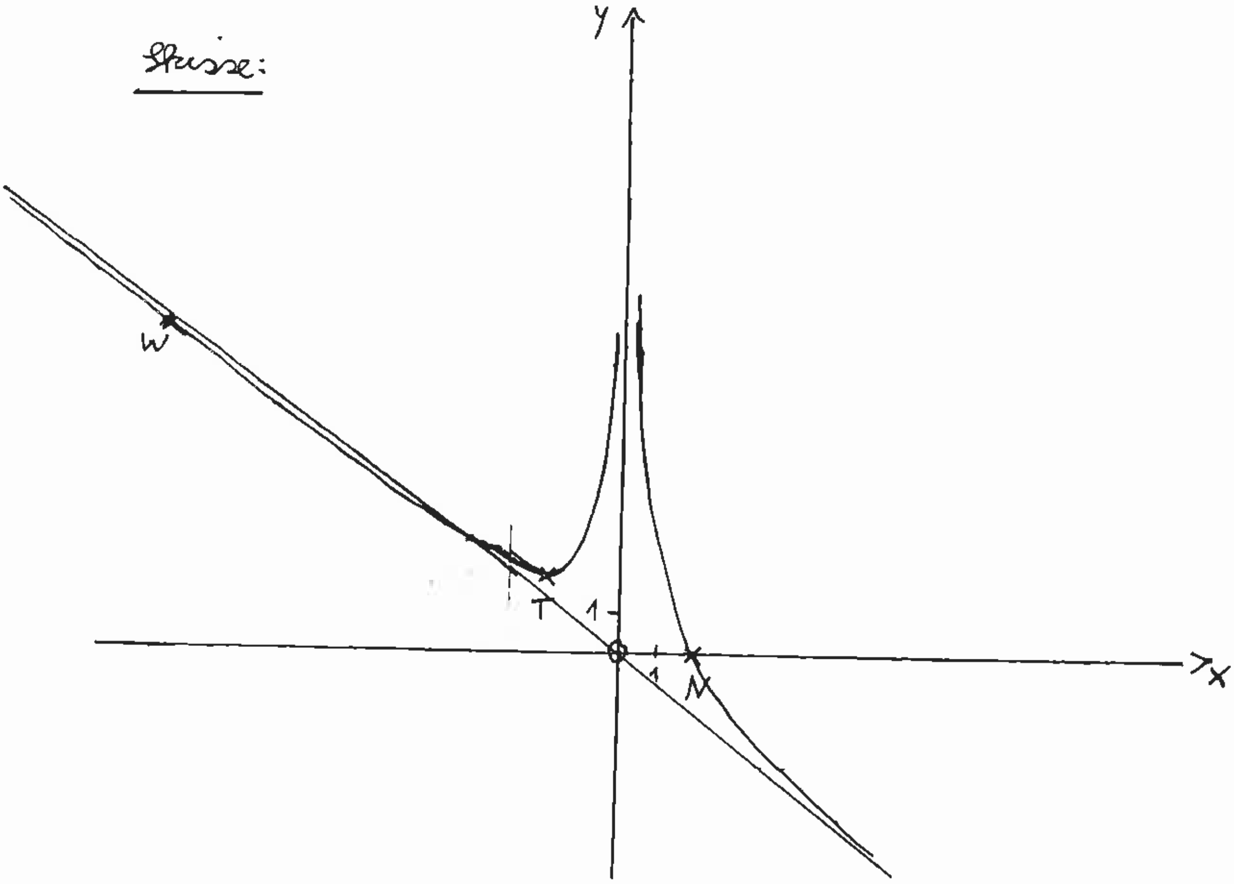
senkr. Asymptote $x=0$

Da $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$ folgt

Schiefe Asymptote $y = -\frac{3}{4}x$

Symmetrie: keine Symmetrie erkennbar.

Skizze:



Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

nach 2

b) $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$$

Definitionsmenge: $x^2 \neq 1$ d.h. $x \neq \pm 1$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

Nullstellen: Bed.: $f(x) = 0$

$x^2 - 4 = 0$ $\quad$ $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

Ableitungen: $$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - (-2x)(x^2-4)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2x - 2x^3 + 2x^3 - 8x}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{-6x}{(1-x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-6(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)(-6x)}{(1-x^2)^4}$$

$$= \frac{-6(1-x^2) - 24x^2}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{-6 + 6x^2 - 24x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{-6 - 18x^2}{(1-x^2)^3}$$

Extrempunkte: notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$-6x = 0 \qquad x = 0$

weitere Untersuchung: $f''(0) = \frac{-6}{1^3} < 0$

$f(0) = \frac{-4}{1} = -4$

Also $H(0 | -4)$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 26)

Wendepunkte: notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$-6 - 18x^2 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{3}$$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$

Es gibt keine Wendepunkte

Asymptoten:

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$ sind Polstellen; jeweils Pol mit VZW

$x = 1$; $x = -1$ sind senkr. Asymptoten

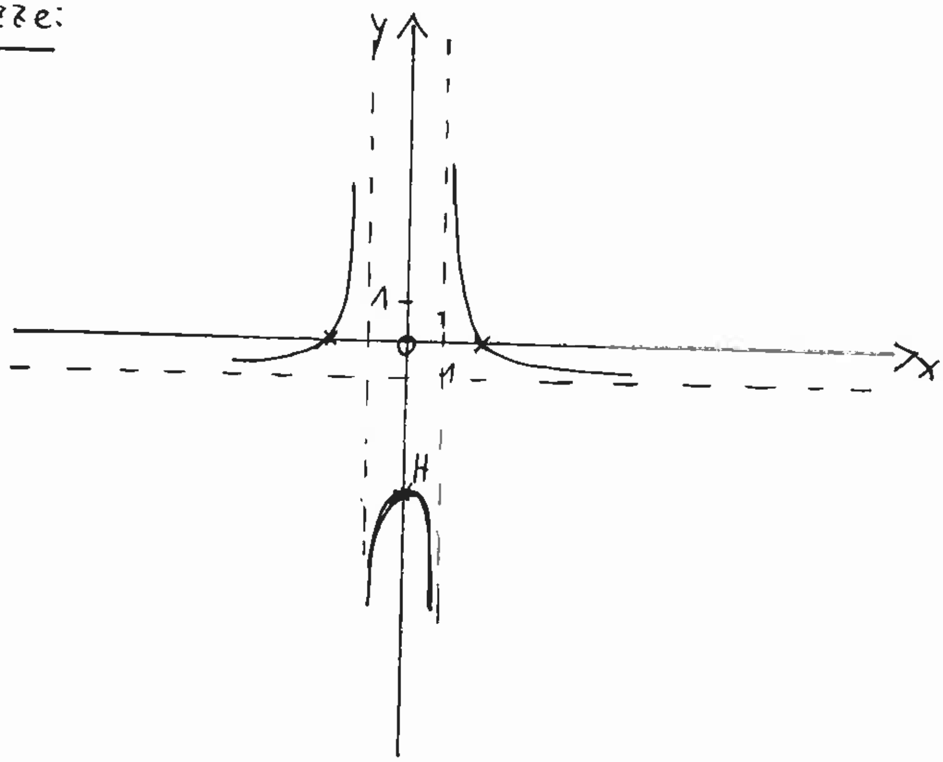
Da der Zählergrad und der Nennergrad gleich sind gilt:

waag. Asymptote $y = -1$

Symmetrie: $f(-x) = f(x)$

Das Schaubild ist symmetrisch bzgl. y-Achse

Skizze:



Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x - 12}{x^2 - 5x + 4}$

Definitionsmenge: $x^2 - 5x + 4 \neq 0$

$(x-1)(x-4) \neq 0$

$x \neq 1;\ x \neq 4$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$

Nullstellen: Bed.: $f(x) = 0$

Raten: $x_1 = 4$

$4^3 - 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 12 = 64 - 32 - 20 - 12 = 0$

aber $4 \notin D$

Horner:

1	-2	-5	-12
$\boxed{4}$	4	8	12
1	2	3	0

weitere Untersuchung:

$x^2 + 2x + 3 = 0$

$x_{2,3} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \notin \mathbb{R}$

Also: Es gibt keine Nullstellen.

Aus dem Bisherigen.

$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x - 12}{x^2 - 5x + 4} = \dfrac{(x-4)(x^2+2x+3)}{(x-4)\ (x-1)} = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$

Das Schaubild hat ein Loch bei $x = 4$.

$L(4 | 9)$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2c)

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1) - 1\cdot(x^2+2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+2x-2-x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x-5}{(x-1)^2}$$

oder zuerst:

$$f(x) = (x^2+2x+3) : (x-1) = x+3+\frac{6}{x-1}$$

$$\begin{array}{l} -(x^2-x) \\ \hline \quad 3x \\ \quad -(3x-3) \\ \hline \qquad 6 \end{array}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{6}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{12}{(x-1)^3}$$

Extrempunkte: notw. Bed.: $f'(x)=0$

$$x^2-2x-5=0$$

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+20}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{24}}{2} = \frac{2\pm2\sqrt6}{2} = 1\pm\sqrt6$$

weitere Untersuchung:

$$f''(1+\sqrt6) = \frac{12}{(1+\sqrt6-1)^3} > 0$$

$$f''(1-\sqrt6) = \frac{12}{(1-\sqrt6-1)^3} < 0$$

$$f(1+\sqrt6) = 1+\sqrt6+3+\frac{6}{1+\sqrt6-1} = 4+\sqrt6+\sqrt6 = 4+2\sqrt6$$

$$f(1-\sqrt6) = 1-\sqrt6+3+\frac{6}{1-\sqrt6-1} = 4-\sqrt6-\sqrt6 = 4-2\sqrt6$$

Damit: $\underline{\underline{T(1+\sqrt6 / 4+2\sqrt6),\ H(1-\sqrt6 / 4-2\sqrt6)}}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2 c)

Wendepunkte: notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{12}{(x-1)^3} \neq 0 \quad \text{für alle } x \in D$$

Es gibt keine Wendepunkte.

Asymptoten:

$x = 1$ ist Polstelle ; Pol mit VZW

$x = 1$ ist senkr. Asymptote

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x-1} = (x^2+2x+3) : (x-1) = x+3+\frac{6}{x-1}$$

$$\begin{array}{l} -(x^2 - x) \\ \hline \quad 3x + 3 \\ \quad -(3x - 6) \\ \hline \qquad 6 \end{array}$$

schiefe Asymptote: $y = x+3$

Symmetrie: Erst aus der Skizze erkennbar.

Punktsymmetrie zum Schnittpunkt der Asymptoten:

$S(1/4)$

Ausnahme: das Loch bei $x = 4$

Nachweis:

$$f(1+u) = 1+u+3+\frac{6}{1+u-1} = 4+u+\frac{6}{u}$$

$$f(1-u) = 1-u+3+\frac{6}{1-u-1} = 4-u-\frac{6}{u}$$

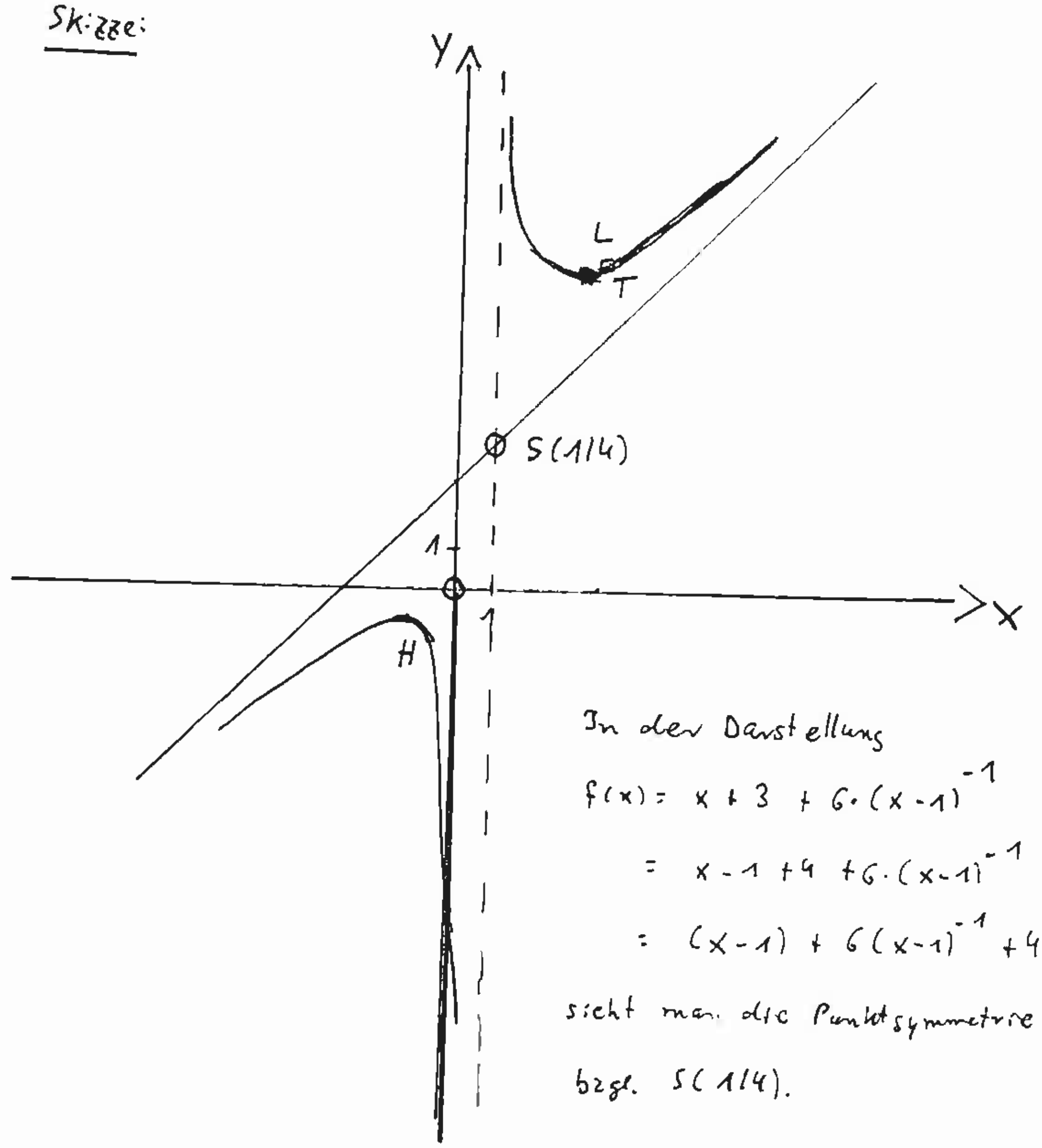
$$\frac{f(1+u)+f(1-u)}{2} = \frac{4+u+\frac{6}{u}+4-u-\frac{6}{u}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Das ist der y-Wert von S.

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2c)

Skizze:



In der Darstellung

$f(x) = x + 3 + 6\cdot(x-1)^{-1}$

$= x - 1 + 4 + 6\cdot(x-1)^{-1}$

$= (x-1) + 6(x-1)^{-1} + 4$

sieht man die Punktsymmetrie bzgl. S(1|4).

d) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x - \frac{7}{3}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

Nullstellen: Raten: $x_1 = -1$

	$\frac{2}{3}$	-1	-4	$-\frac{7}{3}$
$\boxed{-1}$		$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$+\frac{7}{3}$
	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$0 = f(-1)$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2 d)

weitere Untersuchung:

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{7}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$2x^2 - 5x - 7 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{4} = \frac{5 \pm 9}{4}$$

$$\underline{\underline{x_2 = \frac{7}{2}}} \; ; \quad \underline{\underline{x_3 = -1}}$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

$$f''(x) = 4x - 2$$

$$f'''(x) = 4$$

Extrempunkte: notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_4 = 2 \qquad x_5 = -1$$

weitere Untersuchung:

$$f''(2) = 8 - 2 = 6 > 0$$

$$f''(-1) = -4 - 2 = -6 < 0$$

$$f(2) = \frac{16}{3} - 4 - 8 - \frac{7}{3} = -9$$

$$f(-1) = 0$$

Also: $\underline{\underline{T(2 \,|\, -9); \; H(-1 \,|\, 0)}}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 2d)

Wendepunkte: notw. Bed.: $f''(x)=0$

$$4x-2=0$$
$$x=\frac{1}{2}$$

weitere Untersuchung: $f'''(\frac{1}{2})=4\neq 0$

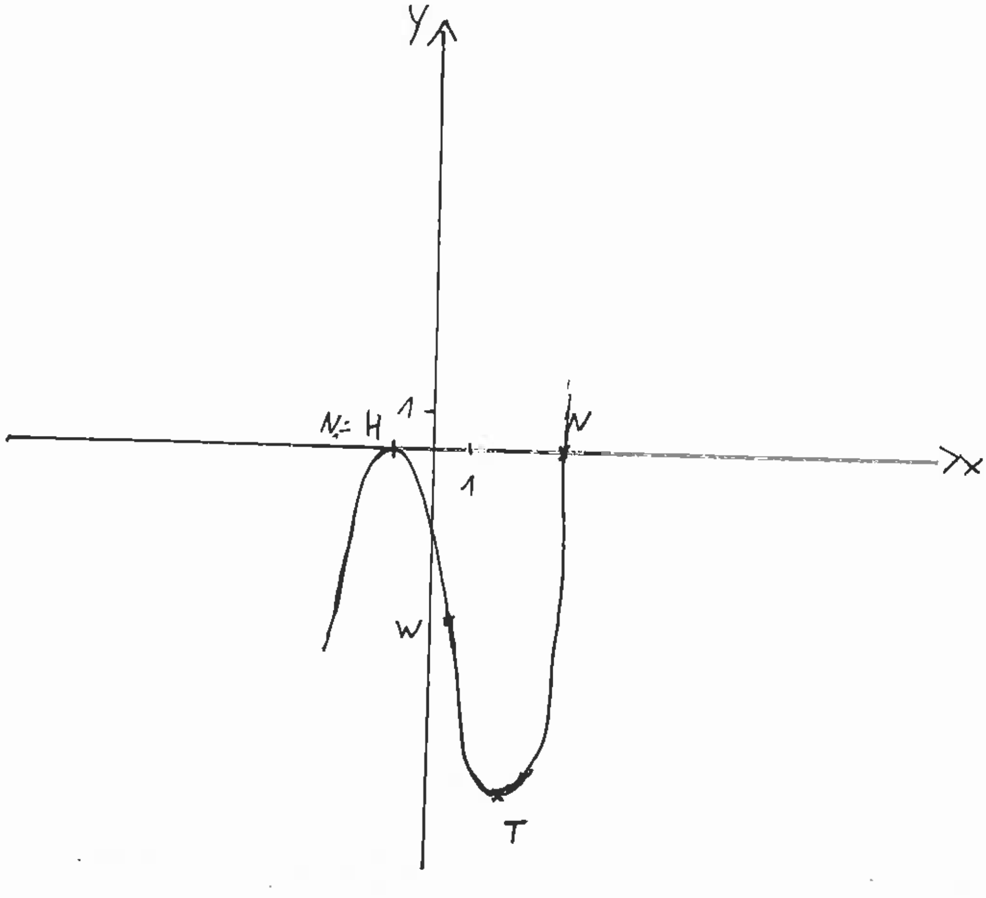
$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{12}-\frac{1}{4}-2-\frac{7}{3}=\frac{1-3-24-28}{12}$$
$$=\frac{-54}{12}=\frac{-9}{2}$$

$W(\frac{1}{2}\,/\,-\frac{9}{2})$

Asymptoten: keine, da f eine ganzrationale Funktion ist.

Symmetrie: Punktsymmetrisch bzgl. $W(\frac{1}{2}\,/\,-\frac{9}{2})$, da alle Parabeln dritten Grades punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt sind.

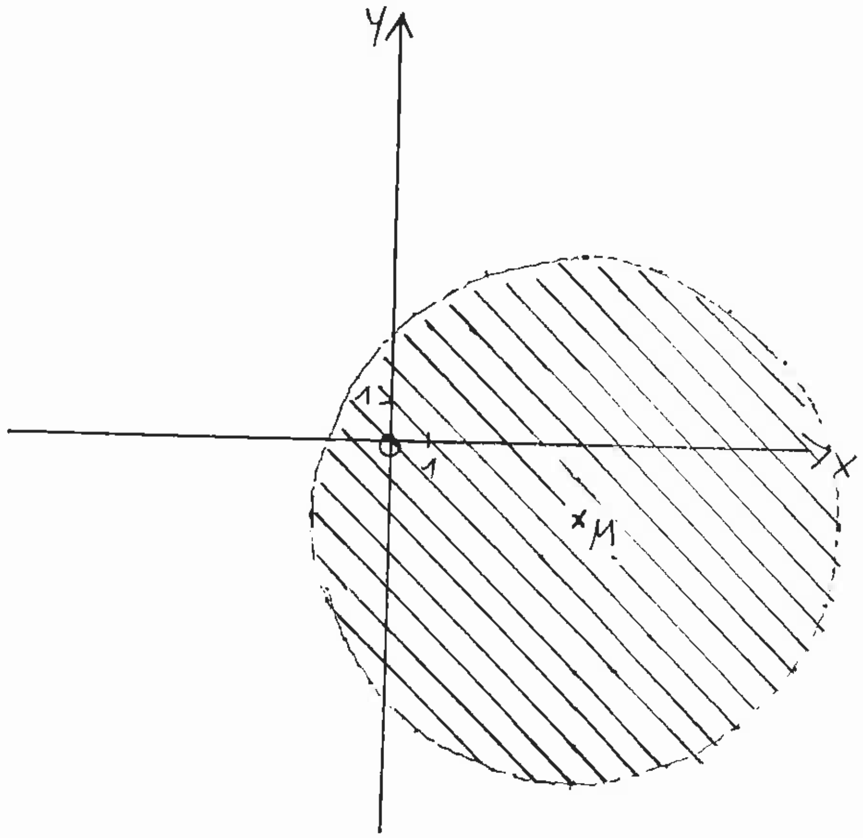
Skizze:



Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

3)
$$x^2 - 10x + 4y + y^2 < 20$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 < 20 + 25 + 4$$
$$(x-5)^2 + (y+2)^2 < 49$$

Da ist das Innere des Kreises mit $M(5/-2)$ und $r=7$



4) $]-\pi;\pi[= I$

a) $\tan\left((x-1)/x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Da $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt

$$\frac{x-1}{x} = \frac{\pi}{6}$$
$$x - 1 = \frac{\pi}{6}x$$
$$x\left(1 - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$
$$x = \frac{1}{1-\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{6-\pi} \in I$$

ebenso:

$$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{x-1}{x} = -\frac{5}{6}\pi$$
$$x - 1 = -\frac{5}{6}\pi x$$
$$x\left(1 + \frac{5}{6}\pi\right) = 1$$
$$x = \frac{1}{1+\frac{5}{6}\pi} = \frac{6}{6+5\pi} \in I$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

weiter: $\tan\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{x-1}{x} = \frac{7}{6}\pi \quad \Big| \quad x-1 = \frac{7}{6}\pi x$$

$$x\left(1-\frac{7}{6}\pi\right) = 1$$

$$x = \frac{1}{1-\frac{7}{6}\pi} \quad \in \mathbb{I}$$

$$\tan\left(\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x-1}{x} = \frac{13}{6}\pi \qquad x-1 = \frac{13}{6}\pi x$$

$$x\left(1-\frac{13}{6}\pi\right) = 1$$

$$x = \frac{1}{1-\frac{13}{6}\pi} = \in \mathbb{I}$$

allgemeiner:

$$\frac{x-1}{x} = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x-1 = \left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) \cdot x$$

$$x\left(1-\frac{\pi}{6}-k\pi\right) = 1$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{1-\frac{\pi}{6}-k\pi}}} \quad \in \mathbb{I} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 4)

b) $4\sin x - 2 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}$ oder $x = \frac{5}{6}\pi$

c) $\sqrt{3}\cdot\sin x - \cos x = 2$

Da $\sqrt{3} < 2$ muss $\boxed{\cos x < 0}$ sein. ab hier

Also:

$\sqrt{3}\cdot\sin x + \sqrt{1-\sin^2 x} = 2$

Subst. $\sin x = u$

$\sqrt{3}\cdot u + \sqrt{1-u^2} = 2$

$\sqrt{1-u^2} = 2 - \sqrt{3}\cdot u \quad |^2$

in $\mathbb{D}_u = [-1;1]$

$\Longleftrightarrow 1 - u^2 = 4 - 4\sqrt{3}\,u + 3u^2$

$0 = 4u^2 - 4\sqrt{3}\,u + 3$

$$u_{1,2} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-48}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = u$$

Also: $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d.h. $x = \frac{\pi}{3}$ oder $x = \frac{2}{3}\pi$

Da $\cos x < 0$ folgt:

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{3}\pi}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 4

d) $\log_x 16 = -4$

$$x^{-4} = 16$$

$$x^4 = \frac{1}{16}$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\underline{\underline{x = (\pm)\frac{1}{2}}}$$

Die Basis darf nicht negativ sein

5) a) $f(x) = 4^{-x} = e^{\ln 4^{-x}} = e^{-x\ln 4}$

$f'(x) = e^{-x\ln 4} \cdot (-\ln 4) = -\ln 4 \cdot 4^{-x}$

b) $f(x) = \ln(ax)$ || $f(x) = \ln a + \ln x$

$f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$ || $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \log_{10} x$

Umschreiben: $y = \log_{10} x$

$$10^y = x$$

$$y \ln 10 = \ln x$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Also: $f(x) = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 5 d) $f(x) = x^3 (2 \cdot \ln x - 1)$

$$f'(x) = 3x^2 (2\ln x - 1) + x^3 \cdot \frac{2}{x}$$

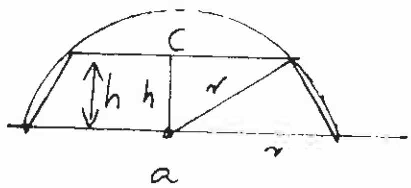
$$= 3x^2 \cdot 2\ln x - 3x^2 + 2x^2$$

$$= \underline{\underline{6x^2 \ln x - x^2}}$$

e) $f(x) = \ln(\cos x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$$

6) Skizze:



$a = 2r$

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Pyth.: $h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = r^2$

$$h = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}$$

$$A = \frac{2r+c}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2} = A(c)$$

$$A'(c) = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2} + \frac{2r+c}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}c}{2\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}}$$

$$= \frac{2\left(r^2 - \frac{1}{4}c^2\right) - \frac{1}{2}c\,(2r+c)}{4\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 6) $$2r^2 - \frac{1}{2}c^2 - cr - \frac{1}{2}c^2 = 0$$

$$-c^2 - cr + 2r^2 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{-2} = \frac{r \pm 3r}{-2}$$

$$(c_1 = -2r) \qquad \underline{\underline{c_2 = r}}$$

Einziger Kandidat: $C = r$

Weiter Untersuchung:

$C = 0$, d.h. $h = r$

$$A(0) = r \cdot \sqrt{r^2} = r^2$$

$$(c=2r) \quad A(2r) = 2r \cdot 0 = 0$$

$$c=r \quad A(r) = \frac{3}{2}r \cdot \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$$

$c = r$, d.h. $h = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$

liefert den maximalen Flächeninhalt.

7) Dose (Mc Donald - Becher)

Zylinder: $$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Oberfläche: $O = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$$O(r) = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

$$O'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$$

$$O''(r) = +\frac{4V}{r^3} + 4\pi > 0$$

Minimum: $O'(r) = 0 \qquad 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{2V}{4\pi} \qquad \underline{\underline{r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}}$

und $O''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$

Lösungen zum Übungsblatt vom 7. Tag

noch 7) Für einen geschlossenen Becher (McDonald) gilt also:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$V = 2\pi r^3 \qquad h = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = \underline{\underline{2r}}$$

Ein Becher ist oben offen:

$$V = \pi r^2 h \qquad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$O = 2\pi r h + \pi r^2$$

$$O(r) = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2 \cdot V}{r} + \pi r^2$$

$$O'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 2\pi r$$

$$O''(r) = \frac{4V}{r^3} + 2\pi > 0$$

$$O'(r) = 0 \qquad 2\pi r = \frac{2V}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{V}{\pi} \quad ; \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \quad ; \quad V = \pi r^3$$

und $O(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}) > 0$

Also: Minimum

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{\pi r^3}{\pi r^2} = \underline{\underline{r}}$$