0) Lautstärke (-pegel) $L = 10\,\text{phon} \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$; I = Schallstärke (Schallintensität) mit Schwelle $I_0 = 10^{-12}\,\frac{W(att)}{m^2}$.
Wie viele Schallquellen mit $L = 0$ phon sind nötig, um die Schmerzschwelle 130 phon zu erreichen (! Achtung: Hier addieren sich die Schallstärken !) ?

Übungsaufgaben für den 6.Tag

1) Ein Dreieck hat die Eckpunkte A(-4/-1), B(2/-2), C(1/3).
Wie lauten die Gleichungen der Geraden, auf denen die Dreiecksseiten liegen?
Wie lang sind die Dreiecksseiten?

2) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels und eventueller Nullstellen der folgenden Parabeln.
Wie entstehen die Parabeln aus der Normalparabel $f(x) = x^2$?
Kann man bereits nach der Scheitelbestimmung erkennen, ob die Funktion Nullstellen besitzt?

a) $f(x) = x^2 - x - 1{,}75$
b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
c) $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 1$
d) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x + 23$

3) Zeichnen Sie das Schaubild von $|x-5| + 3$

4) Bestimmen Sie die Gleichung der schiefen Asymptote, bzw. der Näherungskurve

a) $f(x) = (4+x-2x^2):(2(1+x))$

b) $f(x) = (x^4+3x^3+30):(x^2-2x+5)$

5) Erraten Sie zunächst eine Nullstelle der Funktion f und berechnen Sie die anderen mit Hilfe einer Polynomdivision:

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

6) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen hinsichtlich Nullstellen, Polstellen, Definitionslücken, Näherung und Verhalten für $|x| \to \infty$. $f(x) = \ldots$

a) $\dfrac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

b) $\dfrac{x^2 - x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

7) Eine Gerade ist durch Angabe von zwei Punkten eindeutig festgelegt. Wie viele Punkte legen eine Parabel zweiten Grades fest? Begründen Sie Ihre Vermutung. (Gibt es z.B. außer der Normalparabel noch andere Parabeln zweiten Grades, die durch die punkte A(0/0) und B(1/1) gehen?

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

1) $A(-4|-1)$, $B(2|-2)$, $C(1|3)$

(AB): Zwei-Punkte-Form

$$\frac{y+1}{x+4} = \frac{-2+1}{2+4} = -\frac{1}{6}$$

$$y = -\frac{1}{6}x - \frac{4}{6} - 1$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{3}}}$$

(AC): Zwei-Punkte-Form

$$\frac{y+1}{x+4} = \frac{3+1}{1+4} = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{16}{5} - 1$$

$$\underline{\underline{y = \frac{4}{5}x + \frac{11}{5}}}$$

(BC): $$\frac{y-3}{x-1} = \frac{-2-3}{2-1} = -5 \quad (ZPF)$$

$$y = -5x + 5 + 3$$

$$\underline{\underline{y = -5x + 8}}$$

Länge der Dreiecksseiten:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-(-4))^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \underline{\underline{\sqrt{37}}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \underline{\underline{\sqrt{41}}}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-2)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \underline{\underline{\sqrt{26}}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

() 2)

a)

$$f(x) = x^2 - x - 1{,}75$$
$$= x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - 1{,}75$$
$$= (x - \tfrac{1}{2})^2 - 2 \qquad S(\tfrac{1}{2}|-2)$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet und der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse, also hat die Parabel zwei Nullstellen.

Nullstellen: Bed.: $f(x) = 0$

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 - 2 = 0$$
$$(x - \tfrac{1}{2})^2 = 2$$
$$|x - \tfrac{1}{2}| = \sqrt{2}$$

$x - \frac{1}{2} = \sqrt{2}$	$-x + \frac{1}{2} = \sqrt{2}$
$\underline{\underline{x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2}}}$	$\underline{\underline{x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{2}}}$

Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um $\frac{1}{2}$ nach rechts und um 2 nach unten.

b)

$$f(x) = -x^2 + 2x - 3$$
$$= -[x^2 - 2x + 3]$$
$$= -[x^2 - 2x + 1 - 1 + 3]$$
$$= -[(x-1)^2 + 2]$$
$$= -(x-1)^2 - 2 \qquad S(1|-2)$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

noch 2 b)

Die Parabel ist nach unten geöffnet und der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse, also gibt es keine Nullstellen.

Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Spiegelung an der x-Achse und eine Verschiebung um 1 nach rechts und 2 nach unten.

c) $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 1$

$= 1{,}5\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right]$

$= 1{,}5\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right] + \frac{2}{3}$

$= 1{,}5\left[(x-\frac{1}{3})^2 + \frac{5}{9}\right]$

$= 1{,}5(x-\frac{1}{3})^2 + \frac{5}{6}$ $\qquad S(\frac{1}{3} / \frac{5}{6})$

Die Parabel ist nach oben geöffnet und der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse; somit gibt es keine Nullstellen.

Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Strecken mit dem Faktor 1,5 und Verschieben um $\frac{1}{3}$ nach rechts und $\frac{5}{6}$ nach oben.

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

noch 2)

d) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x + 23$

$= -[0{,}5x^2 - 3x - 23]$

$= -0{,}5[x^2 - 6x - 46]$

$= -0{,}5[x^2 - 6x + 9 - 9$

$= -0{,}5[(x-3)^2 - 55]$

$= -0{,}5(x-3)^2 + 27{,}5$ $\qquad S(3 \mid 27{,}5)$

Die Parabel ist nach unten geöffnet; der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse; also gibt es zwei Nullstellen.

Bed. für Nullstellen: $f(x) = 0$

$-0{,}5(x-3)^2 + 27{,}5 = 0$

$(x-3)^2 = 55$

$x - 3 = \sqrt{55}$ $\quad\|\quad$ $-x + 3 = \sqrt{55}$

$\underline{\underline{x_1 = 3 + \sqrt{55}}}$ $\quad\|\quad$ $\underline{\underline{x_2 = 3 - \sqrt{55}}}$

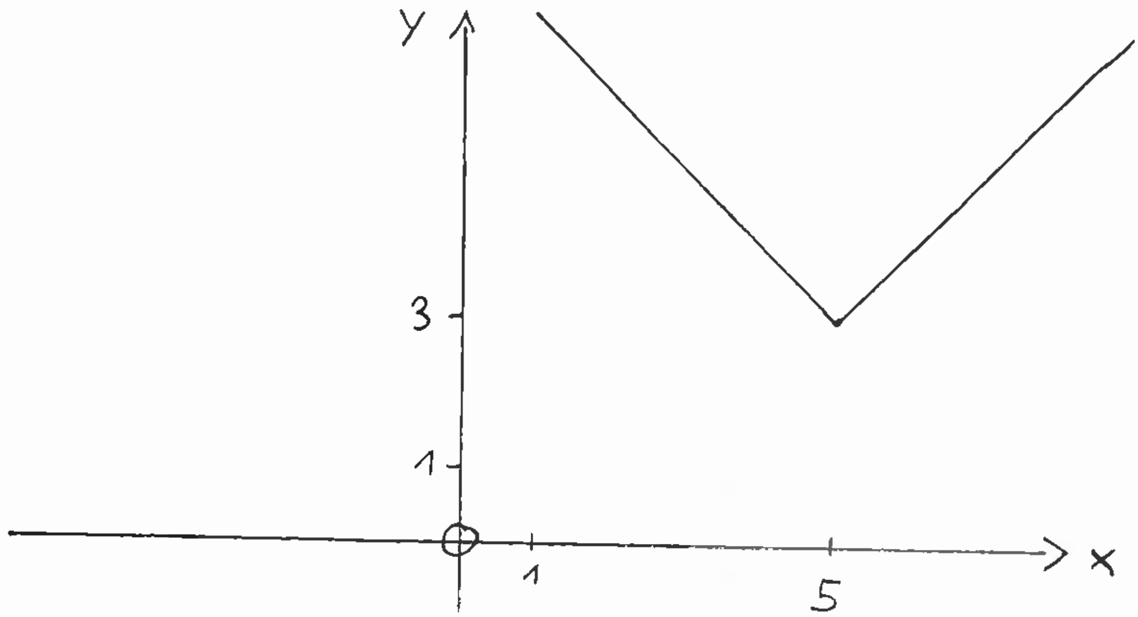
Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Spiegelung an der x-Achse, Stauchung mit dem Faktor 0,5 und Verschiebung um 3 nach rechts und 27,5 nach oben.

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

3) $y = |x-5| + 3$

für $x \geq 5$: $\quad y = x - 5 + 3 = x - 2$

für $x < 5$: $\quad y = -(x-5)+3 = -x + 5 + 3 = -x + 8$



4) a) $f(x) = (4 + x - 2x^2) : (2(1+x))$

$$= (-2x^2 + x + 4) : (2x+2) = -x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2x+2}$$

$$\begin{array}{l} -(-2x^2 - 2x) \\ \hline \quad 3x + 4 \\ \quad -(3x + 3) \\ \hline \qquad 1 \end{array}$$

Schiefe Asymptote:

$$y = -x + \frac{3}{2}$$

b) $f(x) = (x^4 + 3x^3 + 30) : (x^2 - 2x + 5) = x^2 + 5x + 5 + \frac{-15x+5}{x^2-2x+5}$

$$\begin{array}{l} -(x^4 - 2x^3 + 5x^2) \\ \hline \quad 5x^3 - 5x^2 + 30 \\ \quad -(5x^3 - 10x^2 + 25x) \\ \hline \qquad 5x^2 - 25x + 30 \\ \qquad -(5x^2 - 10x + 25) \\ \hline \qquad\quad -15x + 5 \end{array}$$

Näherungskurve:

$$y = x^2 + 5x + 5$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

5)

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

Raten $\underline{\underline{x_1 = 1}}$ $f(1) = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1) = x^2 + 5x + 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad 5x^2 + x \\
\quad \underline{-(5x^2 - 5x)} \\
\qquad 6x - 6 \\
\qquad \underline{-6x - 6} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Weitere Untersuchung:

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

Damit $\underline{\underline{x_2 = -2 \text{ und } x_3 = -3}}$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$= (x^2 - 1)^2$

Nullstellen: $x^2 - 1 = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 1}}$; $\underline{x_2 = -1}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

noch 5b)

Mit Raten und Polynomdivision

Raten: $\underline{\underline{x_1 = 1}}$

$$(x^4 - 2x^2 + 1)(x-1) = x^3 + x^2 - x - 1$$
$$-(x^4 - x^3)$$
$$x^3 - 2x^2 + 1$$
$$-(x^3 - x^2)$$
$$-x^2 + 1$$
$$-(-x^2 + x)$$
$$-x + 1$$
$$-(-x + 1)$$
$$0$$

Weiteres Raten: $\underline{\underline{x_1 = 1}}$

$$(x^3 + x^2 - x - 1) : (x-1) = x^2 + 2x + 1$$
$$-(x^3 - x^2)$$
$$2x^2 - x - 1$$
$$-(2x^2 - 2x)$$
$$x - 1$$
$$x - 1$$
$$0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0; \quad x_{2|3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

6)
a) $$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

Nullstellen: Bed.: $f(x) = 0$

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 = x^2(x^2 - 3x - 4)$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}$$

weitere Untersuchung:

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 4}} \quad ; \quad \underline{\underline{x_3 = -1}}$$

Definitionslücken:

Bed.: $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x_{4,5} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_4 = -2 \quad ; \quad x_5 = -3$$

$$\underline{\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}}}$$

Polstellen bei $x = -2$; $x = -3$

senkr. Asymptoten: $x = -2$; $x = -3$

Verhalten für $|x| \to \infty$:

$$(x^4 - 3x^3 - 4x^2) : (x^2 + 5x + 6) = x^2 - 8x + 30 + \frac{-102x - 180}{x^2 + 5x + 6}$$

$$\begin{array}{l} -(x^4 + 5x^3 + 6x^2) \\ \hline -8x^3 - 10x^2 \\ -(-8x^3 - 40x^2 - 48x) \\ \hline 30x^2 + 48x \\ -(30x^2 + 150x + 180) \\ \hline \end{array}$$

Näherungsparabel für $|x| \to \infty$

$$\underline{\underline{y = x^2 - 8x + 30}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

() noch 6 b)

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

Nullstellen: Bed.: $f(x) = 0$

$x^2 - x = x(x-1) = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\quad x_2 = 1 \notin D$

Definitionslücken:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Raten:

$x_1 = 1$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ \quad -x^2 - 5x \\ \quad \underline{-(-x^2 + x)} \\ \qquad -6x + 6 \\ \qquad \underline{-(-6x + 6)} \\ \qquad \quad 0 \end{array}$$

Weitere Untersuchung:

$x^2 - x - 6 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$x_2 = 3$; $x_3 = -2$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 3\}$

Polstellen: $x = -2$ / $x = 3$

Senkr. As.: $x = -2$ / $y = 3$; waag. As. $y = 0$

Lösungen zum Übungsblatt vom 6. Tag

7)

Vermutung: 3 Punkte legen eine Parabel zweiten Grades fest.

Eine Parabel zweiten Grades hat die Gleichung

$$y = ax^2 + bx + c$$

Zur Bestimmung von a, b und c braucht man drei Bedingungen; deshalb 3 Punkte

Parabeln durch $A(0|0)$, $B(1|1)$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{0 = c}\\ 1 = a + b + c\end{array}\right\}\quad \underline{\underline{a + b = 1}}$$

d.h. $b = 1 - a$

Alle Parabeln mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = ax^2 + (1-a)x \quad, a \in \mathbb{R};\ a \neq 0$$

verlaufen durch $A(0|0)$ und $B(1|1)$