5' (Jk) o) Berechnen Sie $x=\sqrt{8\cdot\sqrt{27\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{27\cdot\sqrt{\dots}}}}}$
durch geeignete Äquivalenzumformung exakt ! (Ergebnis: 12)

Übungsaufgaben für den 5. Tag

1) Um wie viel Prozent muss die Länge eines Rechtecks verändert werden, wenn der Flächeninhalt um 80% und die Breite um 50% größer werden soll?

2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge

$$\frac{1}{x+5} - \frac{3}{5x+20} > 0$$

3) Bestimmen Sie die Lösungsmenge

$$\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$$

4) Ein Händler soll 150 Liter 70-prozentigen Spiritus liefern. Er hat nur 50-prozentigen und 80-prozentigen Spiritus vorrätig. Wie viel Liter muss er von jedem nehmen? Hinweis: 70-prozentiger Spiritus enthält 70% Alkohol und 30% Wasser.

5) Lösen Sie nach x auf!

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

b) $x - 1/x = 0$

c) $x + 1/x = 0$

6) Lösen Sie nach x auf!

a) $\frac{x-1}{2-x} = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$

b) $\frac{3x+5}{x+1} = \frac{2(x+7)}{x+1} - \frac{x+1}{x^2-1}$

c) $\sqrt{(2x+4)} - 6 = 0$

d) $\sqrt{(x+9)} + \sqrt{(x-12)} = \sqrt{x} + \sqrt{(x-7)}$

e) $\log_5(1-2x) = 4$

7) Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

a) $|x+1| = 3x - 1$

b) $|2x-3| = 3 \cdot |x+5|$

c) $\frac{x+3}{x} \geq \frac{x}{x+3}$

d) $6x - 10 - x^2 > 0$

e) $8 - 2\sqrt{2}\cdot|x| - x^4 > 0$

8) Ein Frosch springt über eine 4m breite Straße. Beim 1.Sprung springt er 1 m. Weil Springen anstrengend ist, schafft er bei den weiteren Sprüngen nur noch 2/3 der Weite des jeweiligen Vorgängersprungs. Kommt der Frosch über die Straße?

9) Wie müssen 10 Bäume in einem Garten gepflanzt werden, damit 5 Reihen mit jeweils 4 Bäumen entstehen?

Lösungen zum Zwischentest

zu A1: $\overset{①}{=} \dfrac{2\cdot(x^2-1)}{(1-x^2)\cdot 2x} \overset{①}{=} -\dfrac{1}{x}$

zu A2: $\mathbb{D} =]1;+\infty[$ bzw. $\mathbb{D}$: $x>1$ ①

$\mathbb{L}$: $x = 10^{(10^{10})} = 10^{10000000000}$ ①

so oder so

zu A3: $|x+1| \le x^3+1$ z.B. grafisch mit $f(x) = |x-(-1)|$, $g(x) = 1+x^3$

und Raten der Schnittstellen $-1;0;1$

$\Rightarrow$ $\mathbb{L}$: $\underline{\underline{-1 \le x \le 0}}$ ① $\vee$ $\underline{\underline{x \ge 1}}$ ①

zu A4: $\lg(x^5) = \lg(x^2) + 6$ ist nur für $\underline{x>0}$ definiert

$\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}$ $5\cdot\lg(x) = 2\cdot\lg(x) + 6 \Leftrightarrow 3\cdot\lg(x) = 6$

$\Leftrightarrow \underline{\lg(x) = 2}$ ①

$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{100}}$ ①

zu A5: $E = \underline{1{,}1^4 \cdot 10000\ €}$ ① mit

$(1{,}1)^4 = (1+10^{-1})^4 = 1 + 4\cdot10^{-1} + 6\cdot10^{-2} + 4\cdot10^{-3} + 10^{-4}$

$\Rightarrow E = (10^4 + 4\cdot10^3 + 6\cdot10^2 + 4\cdot10^1 + 1)\ € = \underline{\underline{14641\ €}}$ ①

Lösungen zum Übungsblatt vom 5. Tag

1)

Ursprungsrechteck: $A = a \cdot b$

Neues Rechteck: $A' = a' \cdot b'$

Es gilt: $A' = 1{,}8A \quad ; \quad b' = 1{,}5b$

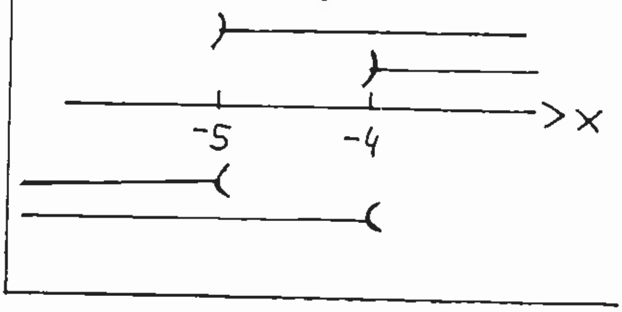
Gesucht: a'

$$
\begin{aligned}
A' &= a' \cdot b' \\
1{,}8A &= a' \cdot 1{,}5b \\
1{,}8 \cdot a \cdot b &= a' \cdot 1{,}5b \qquad |:b \\
1{,}8a &= a' \cdot 1{,}5 \qquad |:1{,}5 \\
a' &= \frac{1{,}8}{1{,}5}a = \frac{6}{5}a = 1{,}2a
\end{aligned}
$$

Die Länge wird um <u>20%</u> vergrößert.

2) $\dfrac{1}{x+5} - \dfrac{3}{5x+20} > 0 \quad | \cdot HN \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -4\}$

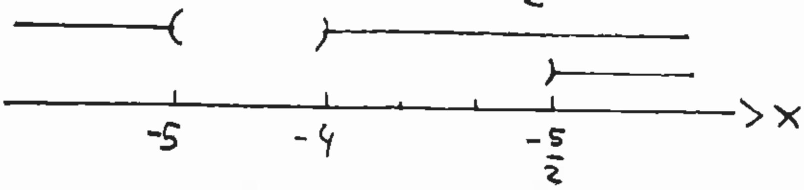
HN: $(x+5)(5x+20)$



1. Fall: $HN > 0$; d.h.

$x < -5$ oder $x > -4$

$$
\begin{aligned}
5x + 20 - 3(x+5) &> 0 \\
5x + 20 - 3x - 15 &> 0 \\
2x + 5 &> 0 \\
2x &> -5 \\
x &> -\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

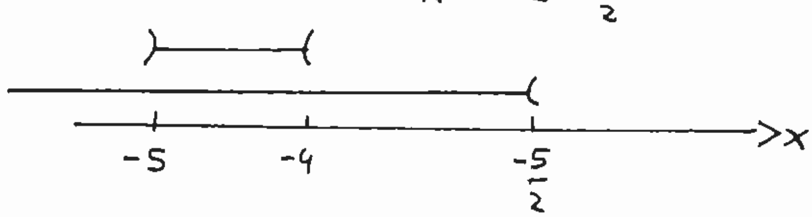


$L_1 = \{x \mid x > -\frac{5}{2}\}$

Lösungen zum Übungsblatt vom [illegible]

2. Fall: $HN < 0$; d.h. $-5 < x < -4$

$$5x + 20 - 3(x+5) < 0$$
$$5x + 20 - 3x - 15 < 0$$
$$2x + 5 < 0$$
$$2x < -5$$
$$x < -\frac{5}{2}$$



$L_2 = \{x \mid -5 < x < -4\}$

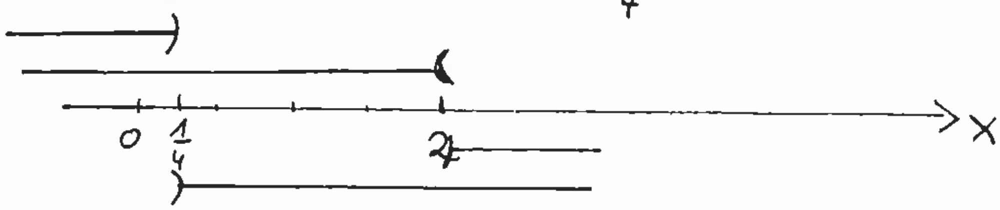
$$L = L_1 \cup L_2 = \{x \mid -5 < x < -4 \text{ oder } x > -\tfrac{5}{2}\}$$

3)

$$\left| \frac{1-4x}{2-x} \right| > 4 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Ein Bruch ist positiv, wenn Zähler und Nenner positiv oder negativ sind.

Der Zähler wird 0 bei $x = \frac{1}{4}$



Wir untersuchen drei Fälle.

Lösungen zum Übungsblatt vom [illegible]

noch 3)

1. Fall: $x \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{1-4x}{2-x} > 4 \quad \Big| \cdot (2-x)$$

$$1-4x > 4(2-x)$$

$$1-4x > 8-4x$$

$1 > 8$ stets falsche Aussage

$L_1 = \{\}$

2. Fall: $\frac{1}{4} < x < 2$

$$-\left(\frac{1-4x}{2-x}\right) > 4 \quad \Big| \cdot (-1)$$

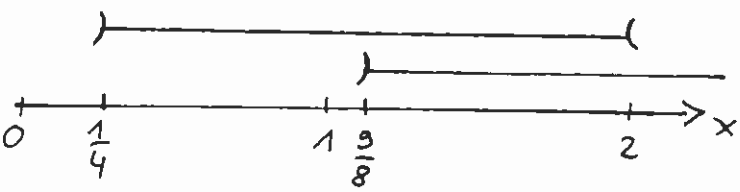
$$\frac{1-4x}{2-x} < -4 \quad \Big| \cdot (2-x)$$

$$1-4x < -4(2-x)$$

$$1-4x < -8+4x$$

$$9 < 8x$$

$$x > \frac{9}{8}$$



$L_2 = \{x \mid \frac{9}{8} < x < 2\}$

3. Fall: $x > 2$

$$\frac{1-4x}{2-x} > 4 \quad \Big| (2-x)$$

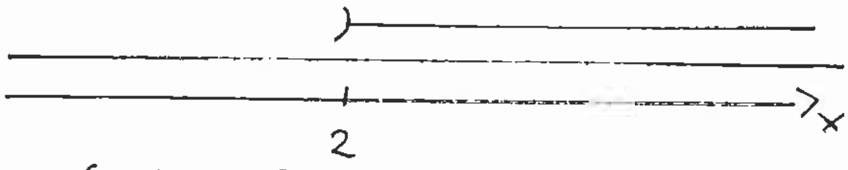
$$1-4x < 4(2-x)$$

Lösungen zum Übungsblatt vom [illegible]

noch 3)

$$1 - 4x < 8 - 4x$$

$1 < 8$ stets wahre Aussage



$$L_3 = \{x \mid x > 2\}$$

$$\underline{\underline{L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \mid \tfrac{9}{8} < x < 2 \text{ oder } x > 2\}}}$$

4) Alles in Liter

Es werden x vom 50%-Spiritus und
y vom 80%-Spiritus verwendet.

Gesamtmenge: $x + y = 150$ (1)

Alkoholmenge: $0{,}5x + 0{,}8y = 0{,}7 \cdot 150$ (2)

Aus (1) $y = 150 - x$ in (2)

$$0{,}5x + 0{,}8(150 - x) = 105$$

$$0{,}5x + 120 - 0{,}8x = 105$$

$$15 = 0{,}3x \quad | : 0{,}3$$

$$\underline{\underline{x = 50}}$$

$$y = 150 - 50 = \underline{\underline{100}}$$

Man muss 50 l vom 50%-Spiritus und 100 l vom 80%-Spiritus nehmen.

Lösungen zum Übungsblatt vom 5. Tag

5) a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

Substitution: $x^2 = u$

$$u^2 - 8u + 16 = 0$$
$$(u-4)^2 = 0$$
$$u = 4$$

Rücksubstitution:

$$x^2 = 4$$

$x_1 = 2; \quad x_2 = -2$ $\qquad$ $\underline{\underline{L = \{-2; 2\}}}$

b) $x - \frac{1}{x} = 0 \quad | \cdot x \qquad x \neq 0$

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$

$x_1 = 1; \quad x_2 = -1$ $\qquad$ $\underline{\underline{L = \{1; -1\}}}$

c) $x + \frac{1}{x} = 0 \quad | \cdot x \qquad x \neq 0$

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$

nicht lösbar in $\mathbb{R}$ $\qquad$ $\underline{\underline{L = \{\}}}$

Lösungen zum Übungsblatt vom

6) a) $\frac{x-1}{2-x} = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12} \quad \Big| \cdot HN \qquad x \neq 2,\ x \neq -2$

Nennerbetrachtung:

$2-x = -(x-2)$

$x-2$

$3x^2-12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$

HN: $3(x-2)(x+2)$

$$-(x-1)\,3(x+2) = 3(x+2) - (6-x)$$

$$-3(x^2+x-2) = 3x+6-6+x$$

$$-3x^2-3x+6 = 4x \qquad | -4x$$

$$-3x^2-7x+6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{-6} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{-6} = \frac{7 \pm 11}{-6}$$

$$x_1 = -3; \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{-3; \tfrac{2}{3}\right\}}}$$

b) $\frac{3x+5}{x+1} = \frac{2(x+7)}{x+1} - \frac{x+1}{x^2-1} \quad \Big| \cdot (x+1)(x-1) \qquad x \neq 1,\ x \neq -1$

$$(3x+5)(x-1) = 2(x+7)(x-1) - (x+1)$$

$$3x^2+2x-5 = 2x^2+12x-14-x-1 \qquad | -2x^2$$

$$x^2+2x-5 = 11x-15 \qquad | -11x+15$$

$$x^2-9x+10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-40}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{2} \qquad L = \left\{\frac{9+\sqrt{41}}{2}; \frac{9-\sqrt{41}}{2}\right\}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom [illegible]

noch 6)

c) $\sqrt{2x+4} - 6 = 0 \quad |+6 \qquad D = \{x \mid x \geq -2\}$

$$\sqrt{2x+4} = 6 \quad |^2$$

$$2x + 4 = 36 \quad |-4$$

$$2x = 32 \quad |:2$$

$$x = 16$$

Probe: $L.S.(16) = \sqrt{2 \cdot 16 + 4} - 6 = 6 - 6 = 0$
$R.S.(16) = 0$
Übereinstimmung

$$\underline{\underline{L = \{16\}}}$$

d) $D = \{x \mid x \geq 12$

$$\sqrt{x+9} + \sqrt{x-12} = \sqrt{x} + \sqrt{x-7} \quad |^2$$

$$x+9 + 2\sqrt{(x+9)(x-12)} + x - 12 = x + 2\sqrt{x(x-7)} + x - 7$$

$$2x - 3 + 2\sqrt{(x+9)(x-12)} = 2x - 7 + 2\sqrt{x(x-7)} \quad |-2x+7$$

$$4 + 2\sqrt{(x+9)(x-12)} = 2\sqrt{x(x-7)} \quad |:2$$

$$2 + \sqrt{(x+9)(x-12)} = \sqrt{x(x-7)} \quad |^2$$

$$4 + 4\sqrt{(x+9)(x-12)} + (x+9)(x-12) = x(x-7)$$

$$4 + 4\sqrt{x^2-3x-108} + x^2-3x-108 = x^2-7x \quad |-x^2+3x+106$$

$$4\sqrt{x^2-3x-108} = -4x + 104 \quad |:4$$

$$\sqrt{x^2-3x-108} = -x + 26 \quad |^2$$

Lösungen zum Übungsblatt vom [illegible]

noch 6 d)

$$x^2 - 3x - 108 = x^2 - 52x + 676 \quad | +52x \; +108 - x$$

$$49x = 784 \quad | :49$$

$$x = 16$$

Probe: $L.S.(16) = \sqrt{16+9} + \sqrt{16-12} = 5 + 2 = 7$
$R.S.(16) = \sqrt{16} + \sqrt{16-7} = 4 + 3 = 7$

$\Big\}$ Überein=
stimmung

$$\underline{\underline{L = \{16\}}}$$

e)

$$\log_5 (1-2x) = 4 \qquad D = \{x \mid x < \tfrac{1}{2}\}$$

$$5^4 = 1 - 2x$$

$$2x = 1 - 5^4$$

$$2x = 1 - 625$$

$$2x = -624$$

$$x = -312$$

$$\underline{\underline{L = \{-312\}}}$$

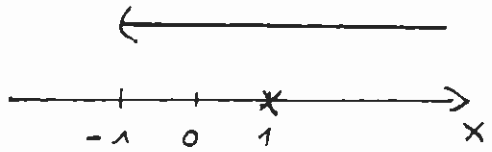
Lösungen zum Übungsblatt vom [illegible]

7) a) $|x+1| = 3x - 1$

1. Fall: $x \geq -1$

$$x+1 = 3x-1 \quad | -x+1$$
$$2 = 2x \quad | :2$$
$$x = 1$$

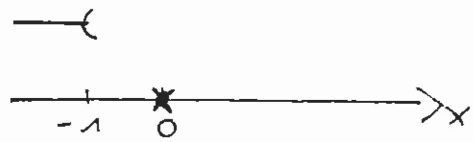
$L_1 = \{1\}$



2. Fall: $x < -1$

$$-(x+1) = 3x-1$$
$$-x-1 = 3x-1 \quad | +x+1$$
$$0 = 4x \quad | :4$$
$$x = 0$$

$L_2 = \{\}$



$$\underline{\underline{L = L_1 \cup L_2 = \{1\}}}$$

b) $|2x-3| = 3 \cdot |x+5|$

Die Argumente der Beträge werden 0 bei: $x = \frac{3}{2}$; $x = -5$

1. Fall: $x < -5$

$$-(2x-3) = 3 \cdot (-1)(x+5)$$
$$-2x+3 = -3x-15 \quad | +3x-3$$
$$x = -18$$

$L_1 = \{-18\}$

Lösungen zum Übungsblatt vom

noch 7b)

2. Fall: $-5 \leq x < \frac{3}{2}$

$$-(2x-3) = 3(x+5)$$
$$-2x+3 = 3x+15 \quad | +2x-15$$
$$-12 = 5x \quad |:5$$
$$-\frac{12}{5} = x$$
$$L_2 = \{-\tfrac{12}{5}\}$$

3. Fall: $x \geq \frac{3}{2}$

$$2x-3 = 3(x+5)$$
$$2x-3 = 3x+15 \quad | -2x-15$$
$$-18 = x$$
$$L_3 = \{\}$$

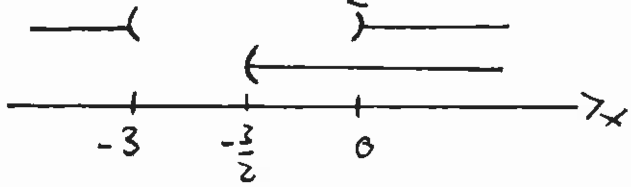
$$\underline{\underline{L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{-18; -\tfrac{12}{5}\}}}$$

c) $\dfrac{x+3}{x} \geq \dfrac{x}{x+3} \quad | \cdot HN \qquad x \neq 0; \; x \neq -3$

$HN: \; x(x+3)$

1. Fall: $HN > 0$; d.h. $x < -3$ oder $x > 0$

$$(x+3)^2 \geq x^2$$
$$x^2+6x+9 \geq x^2 \quad | -x^2-9$$
$$6x \geq -9 \quad |:6$$
$$x \geq -\frac{3}{2} \qquad L_1 = \{x \mid x > 0\}$$

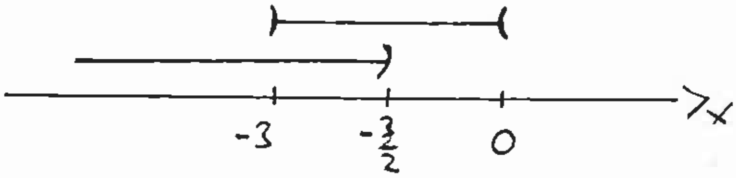


Lösungen zum Übungsblatt vom

noch 7 c)

2. Fall: $HN < 0$, d.h. $-3 < x < 0$

$$(x+3)^2 \leq x^2$$
$$x^2 + 6x + 9 \leq x^2 \quad | - x^2 - 9$$
$$6x \leq -9 \quad | : 6$$
$$x \leq -\frac{3}{2}$$



$$L_2 = \{ x \mid -3 < x \leq -\tfrac{3}{2} \}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \{ x \mid -3 < x \leq -\tfrac{3}{2} \text{ oder } x > 0 \}$$

d) $$6x - 10 - x^2 > 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 6x + 10 < 0$$

Hilfsgleichung:

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$L = \{ \}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom [illegible]

e) $8 - 2\sqrt{2}\,|x| - x^4 > 0$

<u>1. Fall: $x \geq 0$</u>

$$8 - 2\sqrt{2}x - x^4 > 0$$

Hilfsgleichung: $8 - 2\sqrt{2}x - x^4 = 0$

Raten: $x = \sqrt{2}$

Überprüfung: $8 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - (\sqrt{2})^4 = 8 - 4 - 4 = 0$

anschließend dann Polynomdivision (Erg.: $x^3 + \sqrt{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{2}$)

keine weiteren Nullstellen für $x \geq 0$

oder:

$$8 - 2\sqrt{2}x - x^4 = 0$$

$$4 - 2\sqrt{2}x + 4 - x^4 = 0$$

$$2\sqrt{2}(\sqrt{2} - x) + (2 - x^2)(2 + x^2) = 0$$

$$2\sqrt{2}(\sqrt{2} - x) + (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)(2 + x^2) = 0$$

$$(\sqrt{2} - x)\cdot\Big[\underbrace{2\sqrt{2} + (\sqrt{2} + x)(2 + x^2)}_{\text{wird nicht } 0 \text{ für } x \geq 0}\Big] = 0$$

$$(\sqrt{2} - x)\cdot\Big[\underbrace{2\sqrt{2} + (\sqrt{2} + x)(2 + x^2)}_{> 0}\Big] > 0$$

$$\sqrt{2} - x > 0$$

$x < \sqrt{2}$ $\qquad\qquad L_1 = \{x \mid 0 \leq x < \sqrt{2}\}$

Lösungen zum Übungsblatt vom [illegible]

noch 7e)

2. Fall: $x < 0$

$$8 + 2\sqrt{2}x - x^4 > 0$$

$$4 + 2\sqrt{2}x + 4 - x^4 > 0$$

$$2\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + x) + (2 - x^2)(2 + x^2) > 0$$

$$2\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + x) + (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)(2 + x^2) > 0$$

$$(\sqrt{2} + x) \cdot \Big[\underbrace{2\sqrt{2} + (\sqrt{2} - x)(2 + x^2)}_{> 0 \text{ für } x < 0}\Big] > 0$$

also: $\sqrt{2} + x > 0$

$$x > -\sqrt{2}$$

$$L_2 = \{\, x \mid -\sqrt{2} < x < 0 \,\}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \{\, x \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \,\} = \,]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$$

8) Alles in Meter:

Gesamtsprungweite: $1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots$

Trick:

$$x = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \dots$$

$$x - \frac{2}{3}x = 1$$

$$\frac{1}{3}x = 1$$

$$x = 3 < 4$$

Der Frosch schafft es nicht.

$$x = \sqrt{8 \cdot \sqrt{27 \cdot \sqrt{8 \cdot \sqrt{27 \sqrt{\ldots}}}}}$$

$$x^2 = 8 \cdot \sqrt{27 \cdot \sqrt{8 \cdot r}}$$

$$x^4 = 64 \cdot 27 \cdot \sqrt{8 \cdot \sqrt{\ldots}}$$

$$x^4 = 64 \cdot 27 \cdot x$$

$$x^3 = 64 \cdot 27 = 4^3 \cdot 3^3$$

$$x = 4 \cdot 3 = \underline{\underline{12}}$$

$$x = \sqrt{8 \cdot \sqrt{27 \cdot \sqrt{8 \cdot \sqrt{27 \cdot \sqrt{8 \ldots}}}}}$$

$$x = \sqrt{8 \cdot \sqrt{27 \cdot x}}$$

$$x^2 = 8 \cdot \sqrt{27 \cdot x}$$

$$x^4 = 64 \cdot 27 \cdot x \quad | : x$$

$$x^3 = 64 \cdot 27 = 4^3 \cdot 3^3 = 12^3$$

$$\underline{\underline{x = 12}}$$