TR

0) a) Vereinfachen Sie $\dfrac{\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2}}{2+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}}$

b) Zuwachssparen ergibt einen (Zinses-) Zinssatz von
2% im 1. und 3. Jahr,
4% im 2. und 4. Jahr.
Welches Endkapital erhalten Sie bei Anlage von 4000 € nach 4 Jahren?

Übungsaufgaben für den 4.Tag

1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von:

$z^2 - 5{,}4\,z + 2{,}88 < 0$

2) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung:

$\log(1+2x) = \log x + \log(8x)$

3) Bestimmen Sie die Lösungsmenge
$\dfrac{3}{2x+3} < \dfrac{1}{x-1}$

4) $\sqrt{(x+5)} = \sqrt{(x+12)} - 1$

5) Bestimmen Sie die Lösungsmenge
$\dfrac{2x+4}{5x+3} - \dfrac{x+11}{3x-2} - \dfrac{x-5}{15x+9} = 0$

6) Bestimmen Sie die im Intervall [0 ; 2π [gelegenen Lösungen
a) $3\sin x - 2 = 0$
b) $5\tan x + 3 = \tan x$
c) $\cos(0{,}5x + 1) = 0$
d) $3\sin^2 x + 7\cos^2 x = 9$
e) $3\sin^2 x + 7\cos^2 x = 5$ } exakt!
f) $\sin x - 2\cos x = 0$
g) $3\sin x - 4\cos x = 5$

Additionstheoreme:
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

12) Zeigen Sie damit:
a) $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$
b) $\cos(2\alpha) = 1 - 2\cdot\sin^2(\alpha)$

13) Vereinfachen Sie ohne Taschenrechner
a) $\cos(\frac{\pi}{4}+x)+\cos(\frac{\pi}{4}-x)$
b) $\sin(45°)$
c) $\sin(75°)$
d) $\cos(\frac{\pi}{12})$

7) Bestimmen Sie die Lösungsmenge
$3(1-2x) < 4(3-x)$

8) Ein Tank wird von 3 Pumpen leergepumpt. Die erste benötigt allein 6 Stunden, die zweite 4 Stunden und die dritte 3 Stunden. Wie lange brauchen die drei Pumpen, wenn sie gleichzeitig in Betrieb sind?

9) Bestimmen Sie die Lösungsmenge

a) $|x^2 - 5| = 4$

b) $|x - 2| < 4$

c) $|3x| - x > 4$

10) Lösen Sie die Gleichung, runden Sie auf 2 Dezimalen

a) $4^x(6 \cdot 4^x - 1) = 12$
b) $3 \cdot 1{,}5^{-2x} + 2 \cdot 1{,}5^{2x-1} = 16$

11) ... zur Wdh. des 16er-Systems

a) $(ACE)_{16} + (BDF)_{16} = ?$
b) $(D7F)_{16} - (B9A)_{16} = ?$
c) $(D7A)_{16} - (B9F)_{16} = ?$
d) $(AB)_{16} \cdot (DE)_{16} = ?$
e) $(10010101)_2 = (?)_{16}$

Extrablatt (zur Erklärung des Horner Schemas)

Das Hornerschema ist ein Schema zur Polynomdivision eines Polynoms durch einen Linearfaktor der Form $(x-a)$, denn z. B. für $\boxed{p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7}$ und $a = 2$ gilt

- Polynomdivision („klassisch")

$$
\begin{array}{l}
2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 7 \;=\; (x-2)\cdot(2\cdot x^2 + 1\cdot x - 10)\,\boxed{-27} \\
-(2\cdot x^3 - 2\cdot 2\, x^2) \\
\qquad 1\cdot x^2 - 12\cdot x \\
\qquad -(1\cdot x^2 - 2\cdot x) \\
\qquad\qquad -10\cdot x - 7 \\
\qquad\qquad -(-10\cdot x + 20) \\
\qquad\qquad\qquad \boxed{-27} = p(2)
\end{array}
$$

(der Divisionsrest)

- Hornerschema (ausführlich!): Offenbar stimmt

$$
\begin{array}{l}
\quad 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 12\cdot x - 7 \\
+\,(0\cdot x^3 + 2\cdot x^2 2 + 1\cdot x\cdot 2 - 10\cdot 2) \\
= 2\; x^2\cdot x + 1\cdot x\cdot x - 10\cdot x \;\boxed{-27}
\end{array}
$$

... äquivalent zu ...

$$
\begin{array}{l}
2\cdot x^2\cdot x + 1\cdot x\cdot x - 10\cdot x \;\boxed{-27} \\
-\,(2\cdot x^2\cdot 2 + 1\cdot x\cdot 2 - 10\cdot 2) \\
= 2\,x^3 - 3x^2 - 12x - 7
\end{array}
$$

... ausgeklammert...

$$2\cdot x^2\cdot(x-2) + 1\cdot x\cdot(x-2) - 10\cdot(x-2)\;\boxed{-27} = p(x)$$

$$\Longleftrightarrow\; (2\cdot x^2 + 1\cdot x - 10)\cdot(x-2)\;\underset{p(2)\,!}{\underset{\shortparallel}{\boxed{-27}}} = p(x)$$

Im Hornerschema wird also deswegen mit a „von links unten nach rechts oben multipliziert", weil einfach ein x durch a ersetzt wird!

Sie sehen: Der einzige Unterschied zwischen der Ihnen geläufigen „klassischen" Polynomdivision (durch $(x-a)$) und der antiken chinesischen Variante (Hornerschema) ist der zwischen einem Subtraktionsschema („klassisch") und einem Additionsschema („antik")!

Übrigens: Können Sie nun $(11111010111)_2$ ohne TR und möglichst schnell ins 10er-System übersetzen?

Lösungen zum Übungsblatt vom 4. Tag

1) $z^2 - 5{,}4z + 2{,}88 < 0$

Hilfsgleichung: $z^2 - 5{,}4z + 2{,}88 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{5{,}4 \pm \sqrt{29{,}16 - 11{,}52}}{2} = \frac{5{,}4 \pm \sqrt{17{,}64}}{2}$$

$$= \frac{5{,}4 \pm 4{,}2}{2}$$

$z_1 = 4{,}8$ $\qquad z_2 = 0{,}6$

Die zugehörige Parabel ist nach oben geöffnet, also gilt für die Lösungsmenge der angegebenen Ungleichung

$$\underline{\underline{0{,}6 < z < 4{,}8}}$$

oder $L = \{ z \mid 0{,}6 < z < 4{,}8 \} =]0{,}6; 4{,}8[= (0{,}6; 4{,}8)$

2) $\log(1+2x) = \log x + \log(8x)$ $\qquad D = \{ x \mid x > 0 \}$

$\log(1+2x) = \log(x \cdot 8x)$ $\qquad D = \mathbb{R}^+$

Also: $1 + 2x = 8x^2$

$8x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{16} = \frac{2 \pm 6}{16}$$

$x_1 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4} < 0$; scheidet aus, da z.B. $\log(-\frac{1}{4})$ nicht definiert ist.

$$\underline{\underline{L = \{ \tfrac{1}{2} \}}}$$

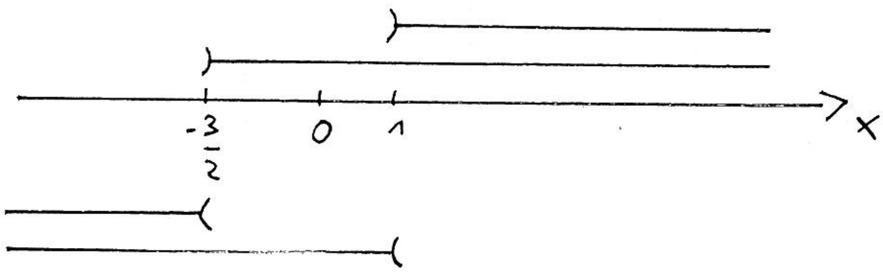
Lösungen zum Übungsblatt vom 4. Tag.

3) $\dfrac{3}{2x+3} < \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad x \neq -\frac{3}{2}$

$x \neq 1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2} ; 1\}$

HN: $(2x+3)(x-1)$



HN > 0 falls: $x < -\frac{3}{2}$ oder $x > 1$

HN < 0 falls: $-\frac{3}{2} < x < 1$

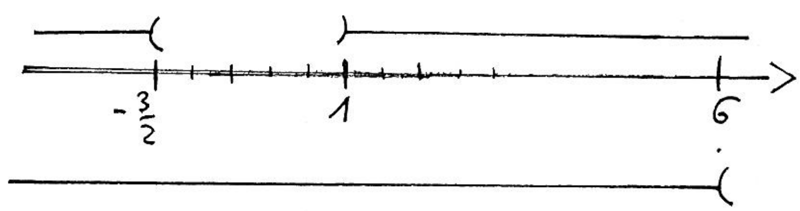
1. Fall: HN > 0

$$\frac{3}{2x+3} < \frac{1}{x-1} \qquad | \cdot HN$$

$$3(x-1) < 2x+3$$

$$3x-3 < 2x+3$$

$$x < 6$$



$L_1 = \{ x \mid x < -\frac{3}{2} \text{ oder } 1 < x < 6 \}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 4. Tag

noch 3)

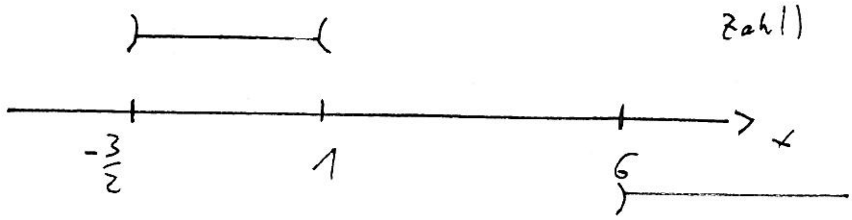
2. Fall: $HN < 0$

$$\frac{3}{2x+3} < \frac{1}{x-1} \quad \Big| \cdot HN$$

$$\vdots$$

$$x > 6$$

(Hinweis: Das Ungleichzeichen dreht sich um bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl)



$$L_2 = \{\} = \emptyset$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \{x \mid x < -\tfrac{3}{2} \text{ oder } 1 < x < 6\} = (-\infty; -\tfrac{3}{2}) \cup (1; 6)$$

4) $\sqrt{x+5} = \sqrt{x+12} - 1$

$$D = [-5; \infty) = \{x \mid x \geq -5\}$$

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{x+12} - 1 \quad \Big|^2$$

$$x + 5 = x + 12 - 2\sqrt{x+12} + 1$$

$$2\sqrt{x+12} = 8 \quad | : 2$$

$$\sqrt{x+12} = 4 \quad |^2$$

$$x + 12 = 16$$

$$x = 4 \in D$$

Probe:

L.S. (4): $\sqrt{9} = 3$

R.S. (4): $\sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3$

Übereinstimmung

$$L = \{4\}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 4. Tag

5) $$\frac{2x+4}{5x+3} - \frac{x+11}{3x-2} - \frac{x-5}{15x+9} = 0 \quad | \cdot HN$$

Nennerbetrachtung:

$$5x+3 \neq 0; \quad x \neq -\frac{3}{5}$$
$$3x-2 \neq 0; \quad x \neq \frac{2}{3}$$
$$15x+9 = 3(5x+3) \neq 0; \quad x \neq -\frac{3}{5}$$
$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right\}$$

$$HN: (5x+3)\cdot(3x-2)\cdot 3$$

$$(2x+4)(3x-2)\cdot 3 - (x+11)(5x+3)\cdot 3 - (x-5)(3x-2) = 0$$
$$[6x^2+8x-8]\cdot 3 - [5x^2+58x+33]\cdot 3 - [3x^2-17x+10] = 0$$
$$18x^2+24x-24-15x^2-174x-99-3x^2+17x-10 = 0$$
$$-133x-133 = 0$$
$$x = -1 \in D$$

$$\underline{\underline{L = \{-1\}}}$$

6) a) $$3\sin x - 2 = 0$$
$$\sin x = \frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0{,}73 \qquad x_2 = 2{,}41}} \quad (= \pi - x_1)$$

b) $$5\tan x + 3 = \tan x$$
$$4\tan x = -3$$
$$\tan x = -\frac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 2{,}50; \; x_2 = x_1 + \pi = 5{,}64}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 4. Tag

noch 6)

c) $\cos(0{,}5x+1) = 0$

$$0{,}5x+1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad 0{,}5x+1 = \frac{3}{2}\pi$$

$$x_1 = \pi - 2 = \underline{\underline{1{,}14}} \qquad x_2 = 3\pi - 2 \notin D$$

d) $3\sin^2 x + 7\cos^2 x = 9$

$$3\sin^2 x + 3\cos^2 x + 4\cos^2 x = 9$$

$$3 + 4\cos^2 x = 9$$

$$4\cos^2 x = 6$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{2}$$

$$\cos x = \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}}}_{>1} \quad \text{oder} \quad \cos x = \underbrace{-\sqrt{\frac{3}{2}}}_{<-1}$$

geht nicht

e) $3\sin^2 x + 7\cos^2 x = 5$

$$3\sin^2 x + 3\cos^2 x + 4\cos^2 x = 5$$

$$3 + 4\cos^2 x = 5$$

$$4\cos^2 x = 2$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad \cos x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0{,}79 \;;\; x_2 = 5{,}50 \;;\; x_3 = 2{,}36 \;;\; x_4 = 3{,}93}}$$

$(x_2 = 2\pi - x_1)$ $(x_4 = 2\pi - x_3)$

Lösungen zum Übungsblatt vom 4. Tag

noch 6)

f) $\sin x - 2\cos x = 0$

$$\sin x = 2\cos x$$

$$\tan x = 2$$

$$\underline{\underline{x_1 = 1{,}11 \quad ; \quad x_2 = 4{,}25}}$$

g) $3\sin x - 4\cos x = 5$

$$3\sin x - 4\sqrt{1-\sin^2 x} = 5 \quad , \quad \text{falls } \cos x \geq 0$$

$$3\sin x + 4\sqrt{1-\sin^2 x} = 5 \quad , \quad \text{falls } \cos x < 0$$

1. Fall: $\cos x \geq 0$

Substitution: $\sin x = u$

$$3u - 4\sqrt{1-u^2} = 5$$

$$3u - 5 = 4\sqrt{1-u^2} \qquad (*)$$

$$9u^2 - 30u + 25 = 16 - 16u^2$$

$$25u^2 - 30u + 9 = 0$$

$$(5u-3)^2 = 0$$

$$u = \frac{3}{5}$$

~~Probe an (*)~~

~~$L.S.\left(\frac{3}{5}\right) =$~~

Rücksubstitution:

$$\sin x = \frac{3}{5}$$

$x_1 = 0{,}64$; $\left(x_2 = 2{,}50 \right.$ übrig bleibt

$\cos x_1 = 0{,}8$ $\left. \cos x_2 = -0{,}8 < 0 \right)$ $x_1 = 0{,}64$

Probe: $L.S.(0{,}64) = 3 \cdot \sin 0{,}64 - 4\cos 0{,}64 = -1{,}4$

$R.S.(0{,}64) = 5$ ↯ keine Lösung in diesem Fall

Lösungen zum Übungsblatt vom 4. Tag

noch 6) g)

2. Fall: $\cos x < 0$

Subst.: $\sin x = u$

$$3\sin x + 4\sqrt{1-\sin^2 x} = 5$$
$$3u + 4\sqrt{1-u^2} = 5$$
$$4\sqrt{1-u^2} = 5-3u$$
$$16 - 16u^2 = 25 - 30u + 9u^2$$
$$0 = 25u^2 - 30u + 9$$
$$(5u-3)^2 = 0$$
$$u = \frac{3}{5}$$

Rücksub.:

$\sin x = \frac{3}{5}$ $\quad \left(\begin{array}{c} x_1 = 0{,}64 \\ \cos x_1 > 0 \end{array} \right)$; $\quad \begin{array}{c} x_2 = 2{,}50 \\ \cos x_2 < 0 \end{array}$

Probe für $x = 2{,}50$

$$\left.\begin{array}{l} L.S.(2{,}50) = 3\cdot\sin 2{,}50 - 4\cdot\cos 2{,}50 = 5 \\ R.S.(2{,}50) = 5 \end{array}\right\} \checkmark$$

$$\underline{\underline{L = \{2{,}50\}}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 4. Tag

7) $3(1-2x) < 4(3-x)$

$3 - 6x < 12 - 4x$

$-2x < 9 \qquad |:(-2)$

$x > -4{,}5$

$L = \{x \mid x > -4{,}5\}$

8) In 1 Stunde leert Pumpe 1 $\frac{1}{6}$ des Tanks

Pumpe 2 $\frac{1}{4}$ " "

Pumpe 3 $\frac{1}{3}$ " "

Gemeinsam leeren sie

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

des Tanks

Also brauchen alle Pumpen zusammen $\frac{4}{3}$ Stunden, d.h.
1 Stunde 20 Minuten.

9) a) $|x^2 - 5| = 4$

d.h. $x^2 - 5 = 4$ oder $x^2 - 5 = -4$

$x^2 = 9$ oder $x^2 = 1$

$x_1 = 3;\ x_2 = -3;\quad x_3 = 1;\ x_4 = -1$

$L = \{-3; -1; 1; 3\}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 4. Tag

noch 9)

b) $|x-2|<4$

d.h. $-4 < x-2 < 4$

$-4 < x-2$ und $x-2<4$

$-2 < x$ und $x < 6$

$$\underline{\underline{L = \{ x \mid -2<x<6 \}}}$$

c) $|3x| - x > 4$

<u>1. Fall: $x \geq 0$</u>	<u>2. Fall: $x<0$</u>
$3x - x > 4$	$-3x - x > 4$
$2x > 4$	$-4x > 4$
$x > 2$	$x < -1$
$L_1 = \{ x \mid x > 2 \}$	$L_2 = \{ x \mid x < -1 \}$

$$\underline{\underline{L = L_1 \cup L_2 = \{ x \mid x<-1 \text{ oder } x>2 \}}}$$

10)

a) $4^x(6 \cdot 4^x - 1) = 12$ Substitution: $4^x = u$

$u(6u-1) = 12$

$6u^2 - u = 12$

$6u^2 - u - 12 = 0$

Lösungen zum übungsblatt vom 4. Tag

noch 10)

a) $u_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{12} = \dfrac{1 \pm 17}{12}$

$u_1 = \dfrac{18}{12} = \dfrac{3}{2}$; $u_2 = -\dfrac{16}{12} = -\dfrac{4}{3} < 0$ scheidet aus

Also: $4^x = \dfrac{3}{2}$

$\lg 4^x = \lg 1{,}5$

$x \lg 4 = \lg 1{,}5$

$x = \dfrac{\lg 1{,}5}{\lg 4} \approx 0{,}29$

b) $3 \cdot 1{,}5^{-2x} + 2 \cdot 1{,}5^{2x-1} = 16$

Subst.: $u = 1{,}5^{2x}$

$3 \cdot u^{-1} + 2 \cdot u \cdot 1{,}5^{-1} = 16$

$\dfrac{3}{u} + \dfrac{2}{1{,}5} u = 16 \qquad | \cdot 1{,}5u$

$4{,}5 + 2u^2 = 24u$

$2u^2 - 24u + 4{,}5 = 0$

$u_{1,2} = \dfrac{24 \pm \sqrt{576 - 36}}{4} = \dfrac{24 \pm \sqrt{540}}{4}$

$\approx \dfrac{24 \pm 23{,}24}{4}$

$u_1 = 11{,}81$ $\qquad$ $u_2 = 0{,}19$

$1{,}5^{2x} = 11{,}81$ $\qquad$ $1{,}5^{2x} = 0{,}19$

$\underline{\underline{x_1 = 3{,}05}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{x_2 = -2{,}05}}$