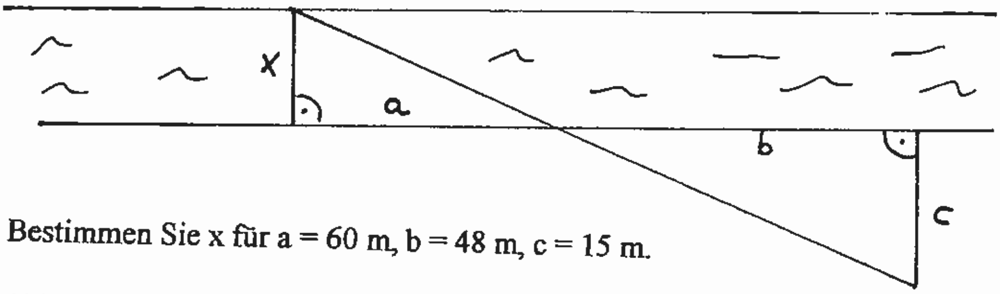
Übungsaufgaben für Dienstag, den 19.8.2008

1) Woran erkennt man im Zweier-System gerade und ungerade Zahlen?

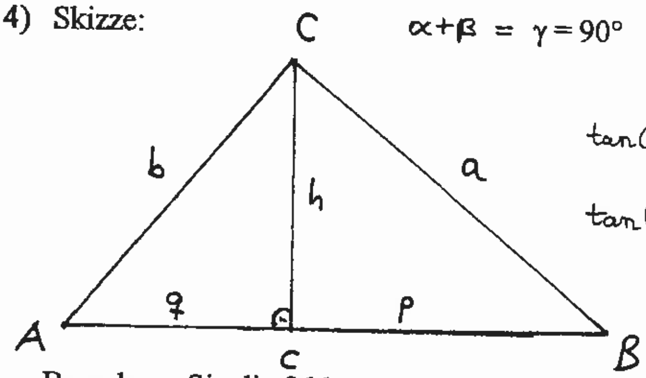
2) Eine Straße hat auf einer Länge von 800m eine Steigung von 20%. Welchen Höhenunterschied haben Anfangs- und Endpunkt des 800m langen Straßenstücks höchstens?

3) Will man die Breite x eines Flusses von einer Uferseite aus bestimmen, so kann man wie in der Figur vier Punkte wählen.



Bestimmen Sie x für a = 60 m, b = 48 m, c = 15 m.

4) Skizze:



$\alpha + \beta = \gamma = 90°$

Aus der Ähnlichkeit aller Teildreiecke ergeben sich

$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \boxed{\frac{h}{q} = \frac{p}{h}}$

$\tan(\beta) = \frac{b}{a} = \boxed{\frac{q}{h} = \frac{h}{p}}$ Höhensatz

$\sin(\alpha) = \boxed{\frac{p}{a} = \frac{a}{c}} = \frac{h}{b}$

$\sin(\beta) = \boxed{\frac{q}{b} = \frac{b}{c}} = \frac{h}{a}$ (doppelter) Flächensatz

Kathetensatz

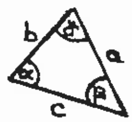
Aus dem Kathetensatz folgt via

$\underline{a^2 + b^2} = pc + qc = (p+q) \cdot c = \underline{c^2}$

Satz von Pythagoras

Berechnen Sie die fehlenden Strecken:
a) a = 6 cm , c = 10 cm
b) a = 14 cm , b = 25,8 cm

5) Berechnen Sie die Längen der fehlenden Seiten und die Weiten der fehlenden Winkel folgender Dreiecke:
a) b = 7 cm ; β = 24°; γ = 73°
b) a = 7 cm; b = 5 cm; c = 8 cm



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$ Cosinussatz
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}}$ Sinussatz

6) Ein Wanderer besteigt einen Berg, auf dem ein 15 m hoher Aussichtsturm steht. Bei einer Rast sieht er Fußpunkt und Spitze des Turms unter Höhenwinkeln von α = 48° und β = 56°. Welchen Höhenunterschied muss der Wanderer bis zum Fußpunkt des Aussichtsturms noch bewältigen? Machen Sie zuerst eine Skizze und lösen Sie dann die Aufgabe.

7) Berechnen Sie für das Dreieck a, β und γ, wenn b = 7 cm, c = 3,5 cm und α = 120°.

8) Berechnen Sie für das Dreieck b, α, β und γ, wenn a = 55,6 m; c = 66m; s_c = 32,7 m.

9) Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus:
a:b = 4:5; γ = 80°; s_c = 4 cm

Aufgabe zu Stellenwertsystemen

0.1) Wandeln Sie folgende Dualzahlen in Dezimalzahlen um
a) $(10011)_2$ b) $(0{,}1011)_2$!

0.2) Wandeln Sie die Dezimalzahl 627 in eine Dualzahl um (Division mit Rest) und bilden Sie daraus die entsprechende Hexadezimalzahl (16er-System)!

0.3) Wandeln Sie die Dezimalzahl 627 per Division mit Rest in eine Hexadezimalsystem um !

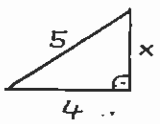
0.4) Berechnen Sie im Dualsystem (Kontrolle im 10er-System)
a) $(10001)_2 + (100100)_2$ b) $(1011)_2 - (111)_2$ c) $(10000001)_2 - (1011011)_2$
d) $(11001)_2 \cdot (1101)_2$ e) $(1011)_2 : (11)_2$

0.5) Übersetzen Sie die Dezimalzahl ins Zweiersystem !
a) 200 b) 400 c) 1000 d) 5000 e) $\frac{2}{3}$

0.6) Übersetzen Sie ins Zehnersystem !
a) $(11100011)_2$ b) $(1010010001)_2$ c) $(0{,}\overline{10})_2$ d) $(DB2B)_{16}$

No Maths

10) a) $\frac{\sin x}{n}$ b) $\lim\limits_{x \to +8} \left(\frac{1}{x-8}\right) = +\infty$! $\lim\limits_{x \to +5} \left(\frac{1}{x-5}\right) = ?$

c) 

Find x !

---

11) Sudoku: Setzen Sie (systematisch) Ziffern von 1 bis 6 so ein, dass sie in jeder Zeile, jeder Spalte und in jedem Rechteck nur einmal vorkommen !

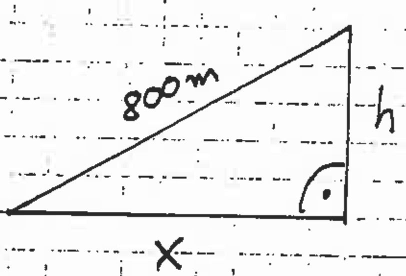
6				1		
5					2	4
4		1			3	
3		2			6	
2	6	3				
1			5			
	a	b	c	d	e	f

(Systematik:
- Mögliche Ziffern eintragen !
- Einschränken / Streichen !
- Einzige kompatible Ziffern fett / einkreisen !)

Lösungen zum Übungsblatt vom 19.8.2008

1) gerade Zahlen haben „ganz rechts" eine 0
ungerade Zahlen haben „ganz rechts" eine 1

2) Skizze:



$\frac{h}{x} = 20\% = 0{,}2$

Also: $h = 0{,}2 \cdot x$

oder $x = 5h$

Pythagoras:

$$x^2 + h^2 = (800\,m)^2$$

$$25h^2 + h^2 = (800\,m)^2$$

$$26h^2 = 640000\,m^2$$

$$h^2 = \frac{640\,000}{26}\,m^2$$

$$h = \sqrt{\frac{640\,000}{26}}\,m \approx \underline{\underline{156{,}9\,m}}$$

Der tatsächliche Höhenunterschied ist vermutlich kleiner, da die maximale Steigung angegeben wird.

3) $\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$ (2. Strahlensatz)

$$x = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{60\,m \cdot 15\,m}{48\,m} = \underline{\underline{18{,}75\,m}}$$ (Flussbreite)

Lösungen zum Übungsblatt vom 19.8.2008

4) a) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100\,cm^2 - 36\,cm^2} = \sqrt{64\,cm^2} = \underline{\underline{8\,cm}}$ (Pyth

$c \cdot q = b^2 \Leftrightarrow q = \frac{b^2}{c} = \frac{64\,cm^2}{10\,cm} = \underline{\underline{6{,}4\,cm}}$ (Kathetensatz)

$c \cdot p = a^2 \Leftrightarrow p = \frac{a^2}{c} = \frac{36\,cm^2}{10\,cm} = \underline{\underline{3{,}6\,cm}}$ (Kathetensatz)

oder: $p = c - q = 10\,cm - 6{,}4\,cm = \underline{\underline{3{,}6\,cm}}$

$h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{6{,}4\,cm \cdot 3{,}6\,cm} = \underline{\underline{4{,}8\,cm}}$ (Höhensatz)

b) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{14^2 + 25{,}8^2}\,cm = \sqrt{861{,}64}\,cm = \underline{\underline{29{,}4\,cm}}$ (Pyth.

$q = \frac{b^2}{c} = \frac{25{,}8^2}{29{,}4}\,cm = \underline{\underline{22{,}6\,cm}}$ (Kathetensatz)

$\frac{b^2}{c} = \frac{25{,}8^2}{\sqrt{861{,}64}}\,cm = \underline{\underline{\boxed{22{,}7\,cm}}}$

Achtung: Fehler durch Verwendung von gerundeten Ergebnissen.

$p = \frac{a^2}{c} = \frac{14^2}{\sqrt{861{,}64}}\,cm = \underline{\underline{6{,}7\,cm}}$ (Kathetensatz)

$\frac{a^2}{c} = \frac{14^2}{29{,}4}\,cm = \underline{\underline{6{,}7\,cm}}$

Gleiches Ergebnis (gerundet) trotz Verwendung von gerundetem Ergebnis.

$h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{\frac{14^2}{\sqrt{861{,}64}} \cdot \frac{25{,}8^2}{\sqrt{861{,}64}}} = \underline{\underline{12{,}3\,cm}}$ (Höhensatz)

oder $h^2 = a^2 - p^2 = 14^2\,cm^2 - \frac{14^4}{861{,}64}\,cm^2$; $\underline{\underline{h = 12{,}3\,cm}}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 19.8.2008

5) a) $b = 7\,cm;\ \beta = 24°;\ \gamma = 73°$

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 97° = \underline{\underline{83°}}$ (Winkelsumme im Dreieck)

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{(Sinussatz)}$$

$$a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 7\,cm \cdot \frac{\sin 83°}{\sin 24°} = \underline{\underline{17{,}1\,cm}}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \quad \text{(Sinussatz)}$$

$$c = b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 7\,cm \cdot \frac{\sin 73°}{\sin 24°} = \underline{\underline{16{,}5\,cm}}$$

b) $a = 7\,cm;\ b = 5\,cm;\ c = 8\,cm$

Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25\,cm^2 + 64\,cm^2 - 49\,cm^2}{2 \cdot 5\,cm \cdot 8\,cm} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 60°}}$$

Sinussatz: $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a}$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{5\,cm}{7\,cm} \cdot \sin 60° = 0{,}619$$

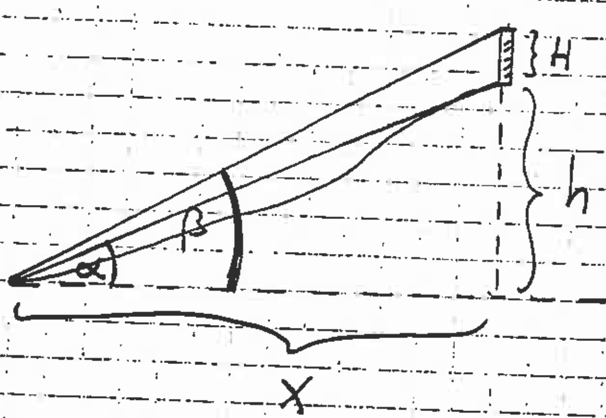
$$\left(= \frac{5}{14}\sqrt{3} \right)$$

$\underline{\underline{\beta = 38{,}2°}}$ oder $\beta = 141{,}8°$ scheidet aus, da $b < a$ folgt $\beta < \alpha$.

$\gamma = 180° - 60° - 38{,}2° = \underline{81{,}8°}$ (Winkelsumme im Dreieck)

Lösungen zum Übungsblatt vom 19. 8. 2008

6) Skizze:



Gegeben:

$\alpha = 48^\circ$

$\beta = 56^\circ$

$H = 15\,m$

Gesucht: h

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} \iff x = \frac{h}{\tan\alpha}$$

$$\tan\beta = \frac{h+H}{x}$$

$$\tan\beta = \frac{h+H}{\frac{h}{\tan\alpha}} = \frac{h+H}{h}\cdot\tan\alpha \quad |\cdot h$$

$$h\cdot\tan\beta = h\cdot\tan\alpha + H\cdot\tan\alpha \quad |-h\tan\alpha$$

$$h\cdot\tan\beta - h\tan\alpha = H\cdot\tan\alpha$$

$$h(\tan\beta - \tan\alpha) = H\cdot\tan\alpha$$

$$h = \frac{H\cdot\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} = \frac{15\,m\cdot\tan 48^\circ}{\tan 56^\circ - \tan 48^\circ} = \underline{\underline{44{,}8\,m}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 19.8.2008

7) Gegeben: $b = 7\,cm$; $c = 3{,}5\,cm$; $\alpha = 120^\circ$

Von dem Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt; also ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

Gesucht: a; β; γ

Kosinussatz: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$= 49\,cm^2 + 12{,}25\,cm^2 - 49\,cm^2 \cdot \underbrace{\cos 120^\circ}_{=-\frac{1}{2}}$$

$$= 85{,}75\,cm^2$$

$$\underline{\underline{a = 9{,}3\,cm}}$$

Sinussatz: $$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{7\,cm}{\sqrt{85{,}75}\,cm}\cdot\sin 120^\circ = 0{,}65$$

$$\underline{\underline{\beta = 40{,}9^\circ}}$$

($\beta = 139{,}1^\circ$ scheidet wegen der Winkelsumme aus)

Winkelsumme im Dreieck:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (120^\circ + 40{,}9^\circ) = \underline{\underline{19{,}1^\circ}}$$

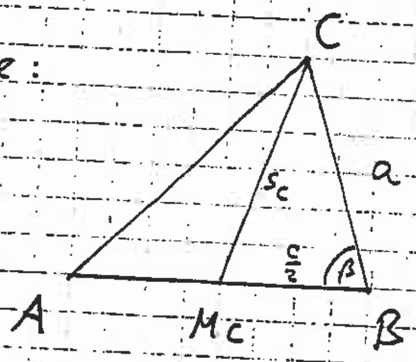
Lösungen zum Übungsblatt vom 19. 8. 2008

8) Gegeben:

$a = 55{,}6\,m; \quad c = 66\,m; \quad s_c = 32{,}7\,m$

Gesucht: $b; \alpha; \beta; \gamma$

Skizze:



Vom Teildreieck $\Delta M_c BC$ sind alle Seitenlängen bekannt.

Kosinussatz:

$$s_c^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\beta$$

$$32{,}7^2\,m^2 = 55{,}6^2\,m^2 + 33^2\,m^2 - 2 \cdot 55{,}6 \cdot 33\,m^2 \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{55{,}6^2 + 33^2 - 32{,}7^2}{2 \cdot 55{,}6 \cdot 33} = 0{,}85$$

$$\underline{\underline{\beta = 32{,}0^\circ}} \quad (32{,}0273^\circ)$$

Kosinussatz:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$= 55{,}6^2\,m^2 + 66^2\,m^2 - 2 \cdot 55{,}6 \cdot 66\,m^2 \cdot \cos 32^\circ$$

$$= 1223{,}37\,m^2$$

$$\underline{\underline{b = 35{,}0\,m}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 19.8.2008

Fortsetzung 8)

Sinussatz: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$; $\sin\alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin\beta$

$* \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{55{,}6\ m}{35{,}0\ m} \cdot \sin 32° = 0{,}84$

$\alpha = 57{,}3°$ oder $\alpha = 122{,}7°$

Da $c > a$ muss $\gamma > \alpha$ sein; also scheidet $\alpha = 122{,}7°$ wegen der Winkelsumme aus.

Winkelsumme:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (57{,}3° + 32°) = \underline{\underline{90{,}7°}}$$

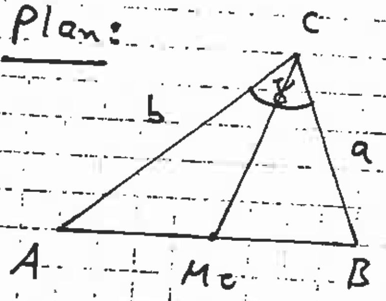
Hinweis: Wird bei * statt 32° der genauere Wert 32,0273° verwendet,
wird $\alpha = 57{,}4°$ und folglich $\gamma = 90{,}6°$

Lösungen zum Übungsblatt vom 19.8.2008

9)

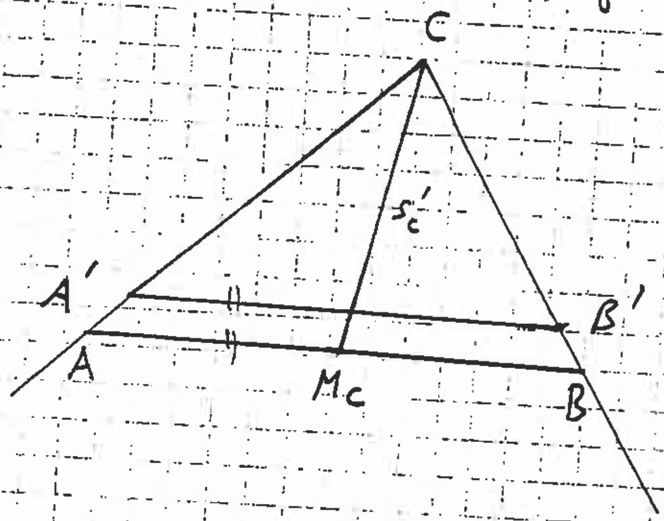
Gegeben: $a : b = 4 : 5$; $\gamma = 80°$; $s_c = 4\,cm$

Plan:



Konstruktion eines Hilfsdreiecks:

$a = 4\,cm$; $b = 5\,cm$; $\gamma = 80°$



„s_c'" wird auf 4 cm verlängert

Der „Endpunkt" ist M_c

Die Parallele zu $A'B'$ durch M_c liefert das gesuchte Dreieck