Übungsaufgaben für den 12.Tag

1) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P(2/9/7) von der Ebene E: $7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 2$

2) Durch Spiegelung an einer Ebene E wird der Punkt P(6/0/3) auf den Punkt P'(-10/4/3) abgebildet. Stellen Sie eine Gleichung für E auf.

3) Berechnen Sie den Abstand der Geraden g und h.
g verläuft durch die Punkte A(1/3/0) und B(2/4/0)
h verläuft durch die Punkte P(5/1/5) und Q(6/1/6).

4) Gegeben sind die Punkte A(5/4/1), B(0/4/1) und C(0/1/5).
a) Zeigen Sie, dass A, B und C Ecken eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks sind.
b) Bestimmen Sie einen Punkt D so, dass die Punkte A, B, C und D Ecken eines Quadrats sind.
c) Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer regelmäßigen quadratischen Pyramide mit der Höhe h=6. Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Pyramidenspitzen S_1 und S_2.
d) Berechnen Sie den Winkel, den die Seitenflächen der Pyramide mit der Grundfläche bilden.
Berechnen Sie auch den Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen.

5) Bestimmen Sie alle Vektoren, die mit
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen Winkel von 60° und mit $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ einen Winkel mit 90° bilden.

Lösungen zum Übungsblatt vom 12. Tag

1) $P(2/9/7)$

$E: \; 7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 2$

HNF: $$\frac{7x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 2}{\sqrt{49 + 36 + 36}} = 0$$

$$\frac{7x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 2}{\sqrt{121}} = 0$$

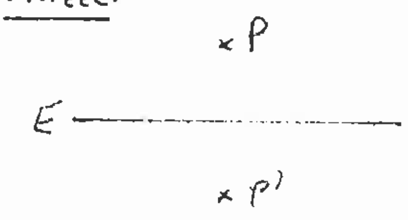
$$E: \; \frac{7x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 2}{11} = 0$$

$$d(P;E) = \left| \frac{7 \cdot 2 - 6 \cdot 9 + 6 \cdot 7 - 2}{11} \right| = \left| \frac{14 - 54 + 42 - 2}{11} \right| = 0$$

P liegt auf E.

2) $P(6/0/3)$; $P'(-10/4/3)$

Skizze:



$\overrightarrow{P'P}$ ist ein Normalenvektor von E

$$\overrightarrow{P'P} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Mitte zwischen P und P' liegt auf E:

$$M\left(\frac{6-10}{2} \Big/ \frac{0+4}{2} \Big/ \frac{3+3}{2} \right) \qquad M = (-2/2/3)$$

$$E: \; \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{\underline{E: \; 4x_1 - x_2 = -10}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 12. Tag

3)

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

Gesucht: $d(g;h)$

g und h sind nicht parallel, da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind.

Schnittuntersuchung (unnötig, der Abstand würde 0 werden)

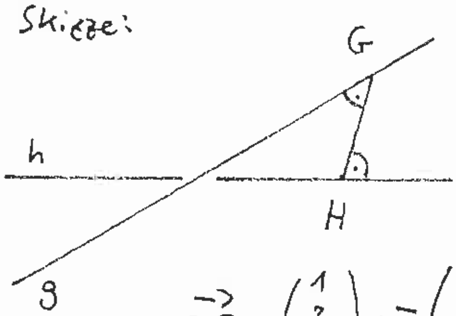
$$\left.\begin{array}{lll} 1 + r & = & 5 + s \\ 3 + r & = & 1 \quad \Rightarrow r = -2 \\ 0 & = & 5 + s \quad \Rightarrow s = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = 0 \ \text{↯}$$

g und h schneiden sich nicht

g und h sind windschief.

I:

Skizze:



$|\vec{GH}| = d$

$\vec{GH}$ ist orthogonal zu beiden Richtungsvektoren.

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{OH} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \bar{s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{GH} = \begin{pmatrix} 5 + \bar{s} & -1 - \bar{r} \\ 1 & -3 - \bar{r} \\ 5 + \bar{s} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \bar{s} - \bar{r} \\ -2 \quad - \bar{r} \\ 5 + \bar{s} \end{pmatrix}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 12. Tag

noch 3)

$$\vec{GH} \perp \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}: \quad \begin{pmatrix}4+\bar{s}-\bar{r}\\-2-\bar{r}\\5+\bar{s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 4+\bar{s}-\bar{r}-2-\bar{r}$$

$$= 2+\bar{s}-2\bar{r} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{GH} \perp \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}: \quad \begin{pmatrix}4+\bar{s}-\bar{r}\\-2-\bar{r}\\5+\bar{s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 4+\bar{s}-\bar{r}+5+\bar{s}$$

$$= 9+2\bar{s}-\bar{r} = 0 \quad (2)$$

$$(2)-2\cdot(1): \quad 5+3\bar{r}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{r}=-\frac{5}{3}$$

$$(1)-2\cdot(2): \quad -16-3\bar{s}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{s}=-\frac{16}{3}$$

Damit: $G\left(-\frac{2}{3} \,/\, \frac{4}{3} \,/\, 0\right) \qquad H\left(-\frac{1}{3} \,/\, 1 \,/\, -\frac{1}{3}\right)$

$$\vec{GH} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$d = |\vec{GH}| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{3}}}$$

II

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \vec{n} \qquad \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} \end{array}$$

$$d = \left|\frac{(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = |(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{n}_0| = \left|\begin{pmatrix}5-1\\1-3\\5-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot|4+2+(-5)| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{3}}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 12. Tag

4) $A(5/4/1),\ B(0/4/1),\ C(0/1/5)$

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$|\vec{AB}| = 5$ $\qquad |\vec{AC}| = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2}$

$\qquad\qquad\qquad |\vec{BC}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{AB} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

Damit: $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ d.h. das Dreieck ist rechtwinklig

$|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$ d.h. das Dreieck ist gleichschenklig

Also ist das Dreieck ABC ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck q.e.d.

b) A, B, C und D bilden ein Quadrat: d.h. $\vec{AD} = \vec{BC}$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} +5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +5 \\ +1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{D(5/1/5)}}$

c) Pyramide: $h = 6$

Ebene, in der die Grundfläche der Pyramide liegt, davon

der Normalenvektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-5} & \cancel{-5} \\ 0 & -3 \\ 0 & 4 \\ -5 & -5 \\ 0 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{4} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \vec{n}'$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_0 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 12. Tag

noch 4c)

$$|\vec{n}| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

S liegt über dem Diagonalenschnittpunkt des Quadrats.

Also: $M\left(\frac{5+0}{2} \Big/ \frac{4+1}{2} \Big/ \frac{1+5}{2}\right)$; $M(2{,}5/2{,}5/3)$

ist die Mitte von A und C.

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OM} + 6 \cdot \vec{n_0} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{6}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} + \frac{24}{5} \\ 3 + \frac{18}{5} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{S_1(2{,}5 / 7{,}3 / 6{,}6)}}$

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OM} - 6 \cdot \vec{n_0} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 - \frac{24}{5} \\ 3 - 18/5 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{S_2(2{,}5 / -2{,}3 / -0{,}6)}}$

d) Normalenvektor einer Seitenfläche z.B. ABS_1

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 3{,}3 \\ 5{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 3{,}3 \\ 5{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ +28 \\ -16{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-5} & \cancel{-2{,}5} \\ 0 & 3{,}3 \\ 0 & 5{,}6 \\ -5 & -2{,}5 \\ 0 & 3{,}3 \\ \cancel{0} & \cancel{5{,}6} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ +28 \\ -16{,}5 \end{pmatrix}$$

Winkel (Grundfläche, Seitenfläche): $\cos\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ +28 \\ -16{,}5 \end{pmatrix}\right|}{5 \cdot \sqrt{(-28)^2 + (-16{,}5)^2}}$

Lösungen zum Übungsblatt vom 12. Tag

noch 4d)

$$\cos\alpha = \left| \frac{+112 - 49{,}5}{5 \cdot \sqrt{784 + 272{,}25}} \right| = \frac{62{,}5}{5 \cdot \sqrt{1056{,}25}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 67{,}38^\circ}}$$

Normalenvektor der Seitenfläche BCS1

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{BS_1} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}3 \\ 5{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \times \vec{BS_1} = \begin{pmatrix} -30 \\ 10 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{0} & \cancel{2{,}5} \\ -3 & 3{,}3 \\ 4 & 5{,}6 \\ 0 & 2{,}5 \\ -3 & 3{,}3 \\ \cancel{4} & \cancel{5{,}6} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -16{,}8 - 13{,}2 \\ 10 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 10 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$$

Winkel (benachbarte Seitenflächen):

$$\cos\beta = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ +28 \\ -16{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}}{\sqrt{1056{,}25} \cdot \sqrt{9 + 1 + \frac{9}{16}}} \right| = \left| \frac{+28 - 12{,}375}{\sqrt{1056{,}25} \cdot \sqrt{10{,}5625}} \right|$$

$$= \frac{15{,}625}{\sqrt{1056{,}25} \cdot \sqrt{10{,}5625}}$$

$$\beta = 81{,}49^\circ$$

5) Gesuchter Vektor: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

60°-Winkel:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \left| \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{1+1}} \right| = \left| \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{2}} \right|$$

90°-Winkel:

$$\cos 90^\circ = 0 = \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{a - b - c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{3}}$$

7

Lösungen zum Übungsblatt vom 12. Tag

noch 5)

Also: $$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$a - b - c = 0$$

$$a - b = c \qquad (2)$$

(1) quadrieren: $$\frac{(a+b)^2}{(a^2+b^2+c^2)\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$(a+b)^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

$$a^2+2ab+b^2 = \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2$$

$$\frac{1}{2}a^2+2ab+\frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2 \qquad (1)'$$

(2) in (1)'

$$\frac{1}{2}a^2+2ab+\frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$\frac{1}{2}a^2+2ab+\frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$$

$$ab = 0$$

D.h. 1. Fall:

$a = 0 \Rightarrow -b = c$

Wahl $\overset{\downarrow}{=} 1$

in (1): $$\frac{|b|}{\sqrt{2b^2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{|b|}{2|b|} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$\mathbb{L}: \; r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\; r>0$$

$$r\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \; r>0$$

Probe: $$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0 \checkmark$$

2. Fall: $b = 0$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$