Übungsaufgaben für den 11.Tag

1) Wie kann die reelle Zahl a gewählt werden, damit die Vektoren linear unabhängig sind?

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ -12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ a \\ a-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ a-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ a+8 \end{pmatrix}$

2) Zeichnen Sie die Ebenen E_1 und E_2 und ihre Schnittgerade in ein Koordinatensystem.

E_1: $x_1+x_2+x_3 = 4$; E_2: $15x_1+10x_2+6x_3 = 30$

3) Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit den Eckpunkten A(0/0/0), B(8/0/0), C(8/8/0), D(0/8/0) und der Spitze S(4/4/12).
Die Ebene, die durch die Punkte P(9/15/-3), Q(14/10/-2) und R(15/17/-5) festgelegt ist, schneidet die Pyramide.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Ebene mit den Kanten der Pyramide. Fertigen Sie eine Zeichnung an.

4) Bestimmen Sie a, b, c für

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}, r,s \in \mathbb{R}$

so, dass
a) die Gerade g parallel zur Ebene E ist, aber nicht in E liegt.
b) die Gerade g in der Ebene E liegt.
c) die Gerade g die Ebene E schneidet.

5) Bestimmen Sie a,b,c $\in$ R in

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}, r,s \in \mathbb{R}$; $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, r,s \in \mathbb{R}$

so, dass gilt:

a) $E_1 = E_2$,
b) E_1 ist parallel zu E_2, aber $E_1 \neq E_2$,
c) E_1 schneidet E_2.

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

1) a)

$$r\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\-3\\a\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\a\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$4r-3s+at=0 \quad (1)$$
$$4r-3s+at=0 \quad (2)$$
$$8r+as-12t=0 \quad (3)$$

$(1)-(2)$: $\quad 0=0$

Wir haben nur zwei verschiedene Gleichungen

$$4r-3s+at=0 \quad |\cdot(-2)$$
$$8r+as-12t=0 \quad \leftarrow +$$

$$(a+6)s+(-12-2a)t=0$$

$a\neq-6$: $\quad s=\frac{2(6+a)}{a+6}t=2t$

Also: $\quad 4r-6t+at=0 \quad (4)$

$\quad 8r+2at-12t=0 \quad (5)$

$2\cdot(4)=(5)$ $\quad r=\frac{(6-a)\cdot t}{4}$

Wahl von t $\rightarrow$ $s=2t$; $r=\frac{(6-a)t}{4}$ also abhängig

Falls $a=-6$: $\quad 0\cdot s+0\cdot t=0 \quad s,t$ bel.

Die Vektoren sind für alle $a\in\mathbb{R}$ linear abhängig.

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

1)

b)

$$r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ a-4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ a-3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ a+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llllll}
(1) & -2r & +3s & +4t & =0 & \\
(2) & ar & +as & +at & =0 & \mid \cdot(-1) \\
(3) & (a-4)r & +(a-3)s & +(a+8)t & =0 & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 & -4r & -3s & +8t & =0 & \\
(1) & -2r & +3s & +4t & =0 & +
\end{array}$$

$$-6r + 12t = 0$$

$$\underline{\underline{r = 2t}} \quad (4)$$

$$(4) \text{ in } (1) \quad -4t + 3s + 4t = 0$$

$$\underline{\underline{s = 0}} \quad (5)$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

noch 1b)

(4) und (5) in (2):

$$2at + at = 0$$
$$3at = 0$$

(4) und (5) in (3):

$$2(a-4)t + (a+8)t = 0$$
$$2at - 8t + at + 8t = 0$$
$$3at = 0$$

Falls $a \neq 0$ folgt $t = 0$ und damit $r = 0$

Für $a = 0$ sind die Vektoren linear abhängig.

Also $a \neq 0$ d.h. $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ liefert linear unabhängige Vektoren.

2) $E_1: x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $E_2: 15x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 30$

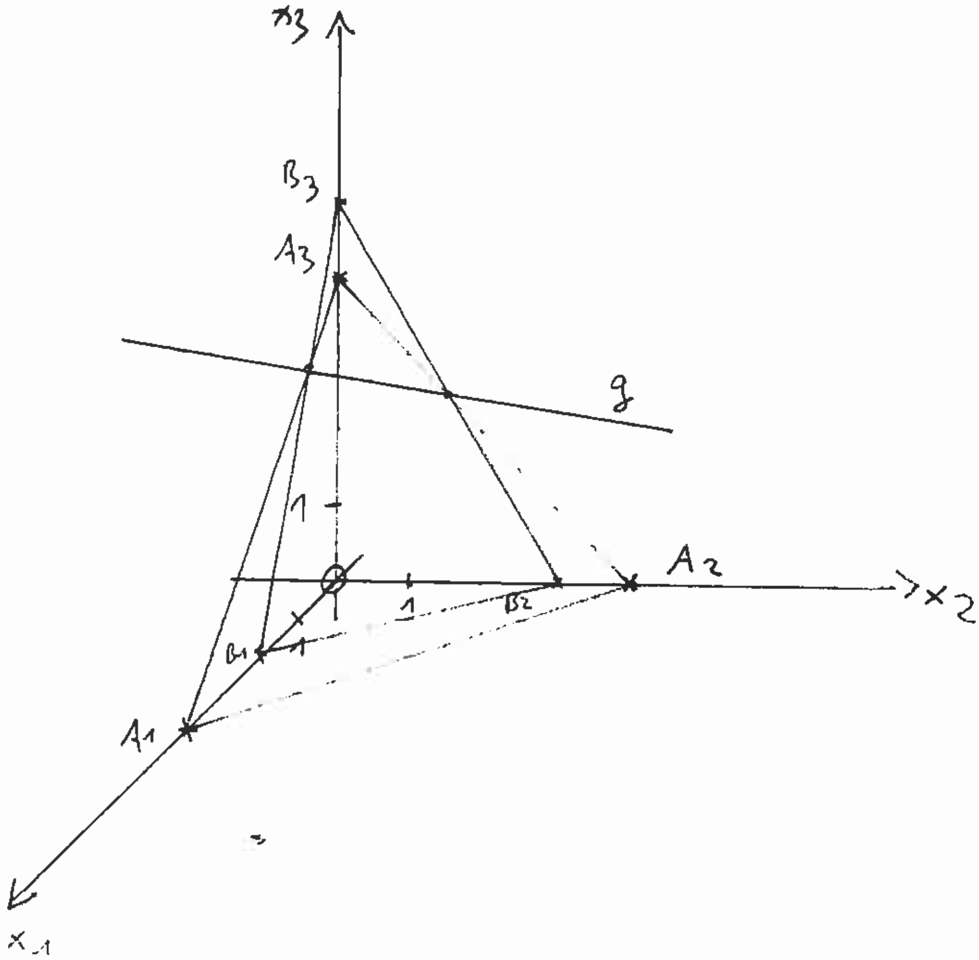
Spurpunkte; d.h. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

E_1: $A_1(4/0/0)$; $A_2(0/4/0)$; $A_3(0/0/4)$

E_2: $B_1(2/0/0)$; $B_2(0/3/0)$; $B_3(0/0/5)$

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

noch 2)



3) $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(8|8|0)$, $D(0|8|0)$, $S(4|4|12)$

$P(9|15|-3)$, $Q(14|10|-2)$, $R(15|17|-5)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Umwandlung in die Normalenform:

$$\begin{array}{cc} \cancel{5} & \cancel{6} \\ -5 & 2 \\ 1 & -2 \\ 5 & 6 \\ -5 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{-2} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 10-2 \\ 6+10 \\ 10+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

noch 3)

Umwandlung in die Koordinatengleichung

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 - (9 + 30 - 15) = 0$$

$$E: \quad x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 24 = 0$$

Kanten: (AS): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

Schnitt: $4r + 8r + 60r = 24$

$72r = 24$

$r = \frac{1}{3} < 1$

$S_{AS} \left(\frac{4}{3} / \frac{4}{3} / 4 \right)$

Kante (BS): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

Schnitt: $8 - 4r + 8r + 60r = 24$

$64r = 16$

$r = \frac{1}{4} < 1$

$S_{BS} (7 / 1 / 3)$

Kante (CS): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

Schnitt: $8 - 4r + 16 - 8r + 60r = 24$

$48r = 0$

$r = 0$

$S_{CS} (8 / 8 / 0)$

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

noch 3)

Kante (DS): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

Schnitt: $4r + 16 - 8r + 60r = 24$

$$56r = 8$$

$$r = \frac{1}{7} < 1$$

$S_{DS}\left(\frac{4}{7} \,/\, 7\frac{3}{7} \,/\, \frac{12}{7}\right)$

Kante (AB): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

Schnitt:

$$8r = 24$$

$r = 3 > 1$ kein Schnitt, da außerhalb

Kante (AD): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

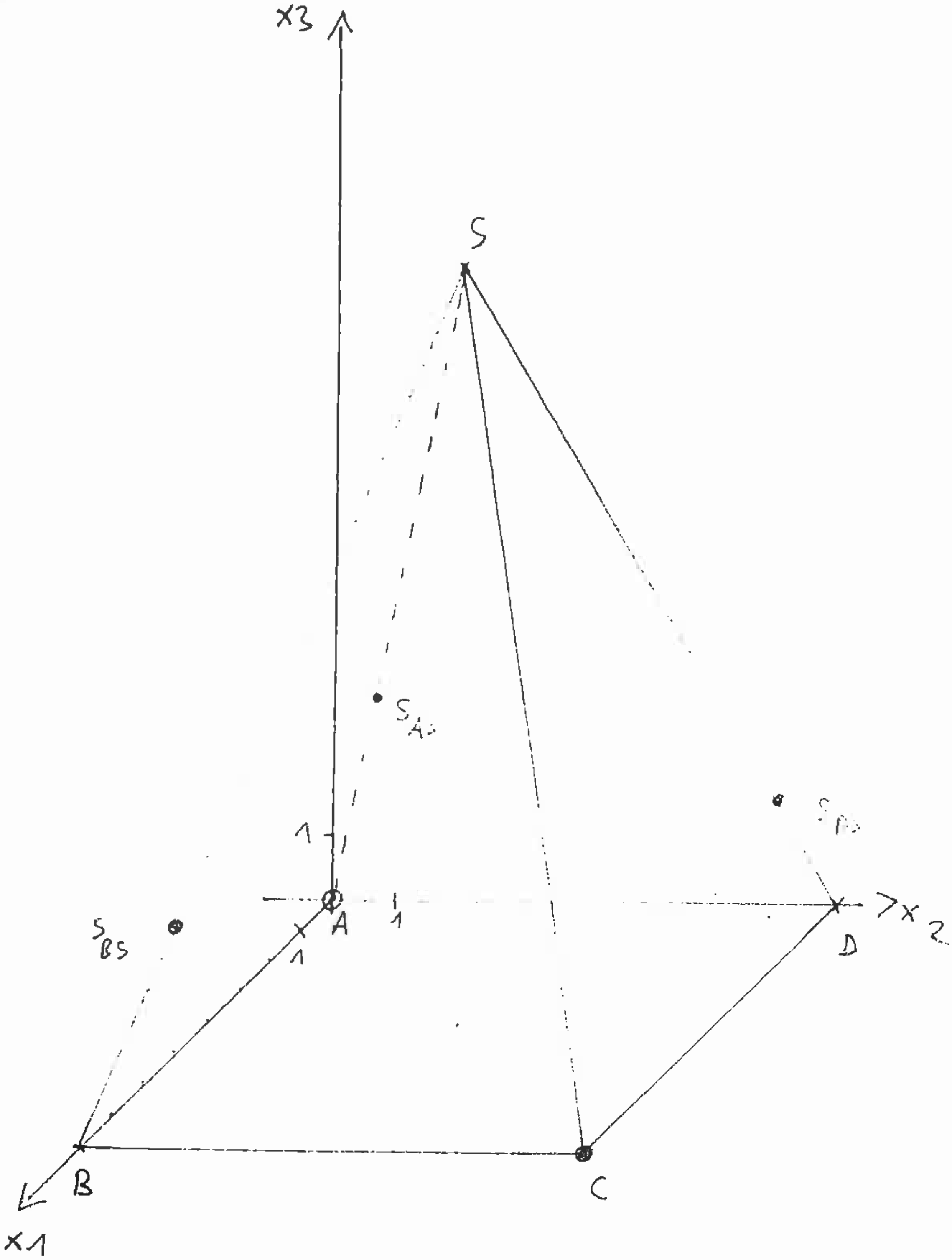
$$16r = 24$$

$r = 1{,}5 > 1$ kein Schnitt, da außerhalb

C liegt auf E, deshalb werden die Kanten (BC) und (CD) in C von E geschnitten.

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag.

noch 3)



Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

8

4)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

a) $g \parallel E$ und g liegt nicht in E

Umwandlung von E:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 2 \\ 0 & c \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{c} \end{array} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$E: c x_1 - c x_2 + x_3 - 2 = 0$$

$$g \parallel E: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 1 \end{pmatrix} = c - bc + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$A(a|2|-1) \notin E$$

$$ac - 2c - 1 - 2 \neq 0$$

$$ac - 2c \neq 3 \qquad (2)$$

aus (1): $c(1-b) = -1 \qquad b \neq 1$

aus (2): $c \cdot (a-2) \neq 3$

$$c = -\frac{1}{1-b} = \frac{1}{b-1} \quad \text{und} \quad c \neq \frac{3}{a-2} \qquad a \neq 2$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

noch 4)

b) g liegt in E:

aus a) $g \parallel E$: $c(1-b) = -1$

$A(a/2/1) \in E$: $c(a-2) = 3$

$b \neq 1$; $a \neq 2$

$$\underline{\underline{c = \frac{1}{b-1}}} \quad ; \quad \underline{\underline{c = \frac{3}{a-2}}}$$

d.h.: $\frac{1}{b-1} = \frac{3}{a-2}$

$$a-2 = 3(b-1)$$

$$\underline{\underline{a = 3b-1}}$$

c) g schneidet E, d.h. $\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

$$c - bc + 1 \neq 0$$

$$c + 1 \neq bc$$

falls $c \neq 0$ $\quad b \neq \frac{c+1}{c}$

falls $c = 0$ $\quad b$ beliebig

$a \in \mathbb{R}$ in jedem Fall

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

5)

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{5} & \cancel{1} \\ 5 & 2 \\ 1 & c \\ 5 & 1 \\ b & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{c} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} bc-2 \\ 1-5c \\ 10-b \end{pmatrix}$$

$$E_1: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} bc-2 \\ 1-5c \\ 10-b \end{pmatrix} = 0$$

$$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{5} & \cancel{1} \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 1 \\ 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{2} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

a) $E_1 = E_2$

D.h. die Normalenvektoren sind lin. abhängig

$$(1) \quad bc - 2 = k \cdot 2$$

$$(2) \quad 1 - 5c = -9k \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1+9k}{5} \quad (2)'$$

$$(3) \quad 10 - b = -k \quad \Rightarrow \quad b = 10 + k \quad (3)'$$

(2)' und (3)' in (1):

$$(10+k) \cdot \frac{1+9k}{5} - 2 = 2k \quad | \cdot 5$$

$$10 + k + 90k + 9k^2 - 10 = 10k$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 11. Tag

noch 5a)

$$9k^2 + 81k = 0$$
$$9k(k+9) = 0$$
$$k_1 = 0 \; ; \quad k_2 = -9$$

$k_1 = 0$ liefert den Nullvektor und scheidet aus.

Also: $k = -9$

Damit: $c = \frac{1-81}{5} = -\frac{80}{5} = \underline{\underline{-16}}$

$b = 10 - 9 = \underline{\underline{1}}$

$A(a|2|3)$ muss in E_2 liegen:

Also: $\left[\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$$(a-2)\cdot 2 - 9 - 2 = 0$$
$$2a - 4 - 9 - 2 = 0$$
$$2a = 15$$
$$\underline{\underline{a = \frac{15}{2}}}$$

b) $E_1 \parallel E_2$ und $E_1 \neq E_2$

$a \neq \frac{15}{2}$; $b = 1$; $c = -16$

c) E_1 schneidet E_2 d.h. $E_1 \nparallel E_2$

a beliebig

$b \neq 1$ oder $c \neq -16$