Übungsaufgaben für den 10.Tag

1) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Die drei Punkte A(1/0), B(5/1) und C(3/4) bilden ein Dreieck. Berechnen Sie die Weite der Innenwinkel.

3) Prüfen Sie, ob der Punkt X(2/3/-1) auf der Geraden liegt, die durch die Punkte A(7/0/4) und B(12/-3/9) verläuft.

4) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h und berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.
g verläuft durch die Punkte A(0/1/1) und B(1/1/2)
h verläuft durch die Punkte P(4/2/4) und Q(6/3/5)

5) Untersuchen Sie, ob die Punkte A, B, C und D in einer gemeinsamen Ebene liegen.
A(0/1/-1), B(2/3/5), C(-1/3/-1) und D(2/2/2).

6) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E.
E: $2x_1+3x_2+4x_3 = 5$

7) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E_1 und E_2.

a) E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $r,s \in R$; E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $r,s \in R$

b) E_1: $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1$; E_2: $x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 9$

Lösungen zum Übungsblatt vom 10. Tag

1)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2 &= r + t &\Leftrightarrow\quad t &= 2 - r \quad (1) \\ 5 &= r + s &\Leftrightarrow\quad s &= 5 - r \quad (2) \\ -1 &= s + t & & \quad (3) \end{aligned}$$

(1) und (2) in (3):

$$\begin{aligned} -1 &= 5 - r + 2 - r \\ -1 &= 7 - 2r \quad && | +2r + 1 \\ 2r &= 8 && | :2 \\ \underline{\underline{r}} &\underline{\underline{= 4}} && (4) \end{aligned}$$

(4) in (1): $t = 2 - 4 = \underline{\underline{-2}}$

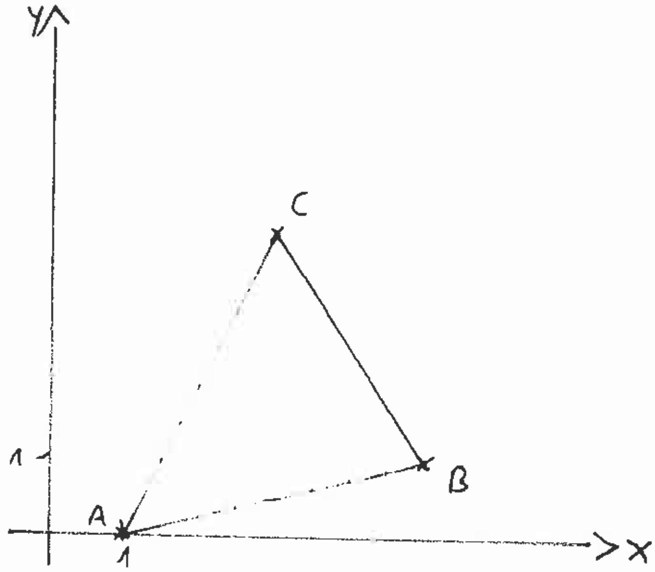
(4) in (2): $s = 5 - 4 = \underline{\underline{1}}$

Also:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 10. Tag

2) $A(1/0)$; $B(5/1)$; $C(3/4)$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+1} \cdot \sqrt{4+16}}$$

$$= \frac{8+4}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{20}} \qquad \underline{\underline{\alpha = 49{,}4^\circ}}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{16+1}}$$

$$= \frac{8-3}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \qquad \underline{\underline{\beta = 70{,}3^\circ}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+16} \cdot \sqrt{4+9}}$$

$$= \frac{-4+12}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}} \qquad \underline{\underline{\gamma = 60{,}3^\circ}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 10. Tag

3) $X(2/3/-1)$

$A(7/0/4)$; $B(12/-3/9)$

g verläuft durch A und B.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 12-7 \\ -3-0 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \ r \in \mathbb{R}$$

Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcll} 2 &=& 7 + 5r & \Rightarrow r = -1 \\ 3 &=& -3r & \Rightarrow r = -1 \\ -1 &=& 4 + 5r & \Rightarrow r = -1 \end{array}\right\} \text{Übereinstimmung}$$

Damit X liegt auf der Geraden.

4) g: $A(0/1/1)$; $B(1/1/2)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ r \in \mathbb{R}$$

h: $P(4/2/4)$; $Q(6/3/5)$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6-4 \\ 3-2 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ s \in \mathbb{R}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 10. Tag

noch 4)

Vergleich der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Sie sind linear unabhängig, also sind g und h nicht parallel.

Untersuchung auf einen Schnittpunkt:

Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= 4 + 2s \quad (1)\\ 1 &= 2 + s \quad \Leftrightarrow s = -1 \quad (2)\\ 1 + r &= 4 + s \quad (3)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &(2) \text{ in } (1): \quad r = 4 - 2 = 2\\ &\text{Vergleich:}\\ &(2) \text{ in } (3): \quad r = 4 - 1 - 1 = 2\end{aligned}\right\} \text{Übereinstimmung}$$

Damit:

g und h schneiden sich.

Schnittpunktsberechnung:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

oder:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S(2/1/3)}}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 10. Tag

5) $A(0/1/-1)$; $B(2/3/5)$; $C(-1/3/-1)$; $D(2/2/2)$

A, B und C liegen in der Ebene E.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r' \begin{pmatrix} 2-0 \\ 3-1 \\ 5+1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1-0 \\ 3-1 \\ -1+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Punktprobe: Liegt D in E?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 = r - s \quad (1)$$

$$2 = 1 + r + 2s \quad (2)$$

$$2 = -1 + 3r \iff r = 1 \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (3) \text{ in } (1): & 2 = 1 - s \iff s = -1 \\ \text{Vergleich:} & \\ (3) \text{ in } (2): & 2 = 1 + 1 + 2s \iff s = 0 \end{array}\right\} \text{keine Übereinstimmung}$$

D liegt nicht in E, das heißt:

es gibt keine gemeinsame Ebene für die vier Punkte.

Lösungen zum Übungsblatt vom 10. Tag

noch 7)

$$\begin{aligned} 1 + r + s &= 2 + 2u \\ s &= 3 + t \\ 3 &= 2 + t + u \iff t = 1 - u \end{aligned}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-u)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u \in \mathbb{R}$$

b) $E_1: \; 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \qquad (1)$

$E_2: \; x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 9 \qquad (2)$

$(1)-(2)$: $2x_1 + 6x_2 = -10 \quad | -6x_2$

$$2x_1 = -10 - 6x_2 \quad | :2$$

$$x_1 = -5 - 3x_2 \qquad (3)$$

(3) in (2): $-5 - 3x_2 - 4x_2 - 2x_3 = 9 \quad | +5 + 7x_2$

$$-2x_3 = 14 + 7x_2$$

$$x_3 = -7 - \frac{7}{2}x_2 \qquad (4)$$

aus (3) und (4) — Setze: $x_2 = r$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-3x_2 \\ x_2 \\ -7-\frac{7}{2}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$$

Lösungen zum Übungsblatt vom 10. Tag

6) $E: \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$

Suche nach drei Punkten die in E und nicht auf einer Geraden liegen.

$A(1 \mid 1 \mid 0)$

$B(\frac{1}{2} \mid 0 \mid 1)$

$C(0 \mid 1 \mid \frac{1}{2})$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r' \begin{pmatrix} 1/2 - 1 \\ 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 1 \\ 1/2 - 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r' \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Alternative:

$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}$

$x_2 = x_2$

$x_3 = x_3$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

7)

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r, s \in \mathbb{R}$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t, u \in \mathbb{R}$

(Umbenennung der Parameter)

Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

Wie muss die reelle Zahl a gewählt werden, damit die Vektoren linear abhängig sind?

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lllll} 2r & -t & +as & =0 & |\cdot 3 \\ 3r & +3t & +3s & =0 & + \quad |\cdot(-2) \\ 5r & +6t & +2s & =0 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 2r - t & +as & =0 & \\ 9r & +(3a+3)s & =0 & + \\ -r & -4s & =0 & |\cdot 9 \end{array}$$

$$(3a-33)s = 0$$

Falls $a=11$ muss s nicht zwingend 0 sein

Für $a=11$ sind Vektoren linear abhängig.

$$r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusatz zum 10. Tag

$$\begin{aligned} 2r - t + 11s &= 0 \quad | \cdot 3 \quad | \cdot 6 \\ 3r + 3t + 3s &= 0 \quad + \\ 5r + 6t + 2s &= 0 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2r - t + 11s &= 0 \\ 9r + 36s &= 0 \quad | :4 \quad \Rightarrow \quad r + 4s = 0 \; ; \; r = -4s \\ 17r + 68s &= 0 \quad | :17 \quad \Rightarrow \quad r + 4s = 0 \; ; \; r = -4s \end{aligned}$$

Wahl: $s = 1$, damit $r = -4$

Eingesetzt in die 1. Gleichung:

$$-8 - t + 11 = 0$$

$$3 = t$$

$$-4\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}11\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix}1\\a\\a^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\\18\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Lösung: $r\begin{pmatrix}1\\a\\a^2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\8\\18\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} r + 2s + t &= 0 \quad | (-1) \\ ar + 8s + t &= 0 \quad + \\ a^2 r + 18s + t &= 0 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r + 2s + t &= 0 \\ (a-1)r + 6s &= 0 \quad | \cdot (-8) \\ (a^2-1)r + 16s &= 0 \quad | \cdot 3 \quad + \end{aligned}$$

Zusatz zum 10. Tag

$$\begin{aligned} r + 2s + t &= 0 \\ (a-1)r + 6s &= 0 \\ (-8a+8+3a^2-3)r &= 0 \end{aligned}$$

r muss nicht zwingend 0 sein, falls

$$-8a+8+3a^2-3 = 0$$

$$3a^2-8a+5=0$$

$$a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6}$$

$$a_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad ; \quad a_2 = \frac{6}{6} = 1$$

Die Vektoren sind linear abhängig für $a=1$ bzw. $a=\frac{5}{3}$

$\underline{a=1}$

$$\left.\begin{aligned} r + 2s + t &= 0 \\ 6s &= 0 \Leftrightarrow s=0 \end{aligned}\right\} r=-t$$

wähle z.B. $t=-1$ dann $r=1$, $s=0$

$$1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\8\\18\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$\underline{a=\frac{5}{3}}$

$$\begin{aligned} r + 2s + t &= 0 \Leftrightarrow t = -r-2s \\ \tfrac{2}{3}r + 6s &= 0 \Leftrightarrow r = -9s \end{aligned}$$

Wähle z.B. $s=1$; $r=-9$; $t=7$

$$-9\begin{pmatrix}1\\5/3\\25/9\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\8\\18\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$