Stützkurs Mathematik WIW – Übungen Tag 5

Datum: 17.01.2011

LÖSUNGSVORSCHLAG

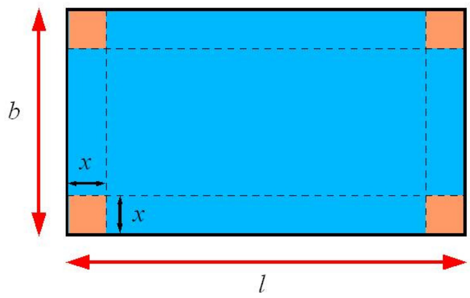
Themen:

Extremwertprobleme, Ableitung der Umkehrfunktion, Grenzwerte, Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Umfang:	6 Aufgaben
Hilfsmittel:	Sind keine notwendig. Eine Formelsammlung und ein nicht programmierbarer Taschenrechner können aber verwendet werden.

Aufgabe A1 (Von Schachteln und Kisten, Extremwertaufgaben mit Randwerten):

Wir interessieren uns im Folgenden für Verpackungen und hier speziell für Schachteln. Diese lassen sich durch entsprechendes Einschneiden kleiner Quadrate in einen rechteckiges/n Papier/Karton herstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA) sei $l \geq b$. Eine Skizze hierzu sehen wir in Figur 1.



Figur 1: Eine Blatt Papier wird zum Schächtelchen.

a) Für welches x erhalten wir eine möglichst voluminöse Schachtel, wenn $l = 4b$ ist?

Wir haben uns für ein passendes $x = d$ größer 0 entschieden. Dieses bleibt nun fest, ebenso wie der Umfang des Rechtecks.

b) Bei welchem Verhältnis der Rechtecksseiten zueinander erhalten wir dann das Schächtelchen mit dem maximalen Volumen?

c) Das gleiche Spiel noch einmal, diesmal bleibt aber die Fläche des Rechtecks neben $x = d$ fest. Wann liegt nun das Schächtelchen mit möglichst großem Volumen vor?

Es sei nun $l = 3b$. Damit die Schachtel gut getragen werden kann, soll $\frac{b}{4} \leq x \leq \frac{b}{3}$ gewählt werden.

d) Wann erhalten wir jetzt eine vom Volumen her möglichst große Schachtel?

Es seien abschließend wieder alle möglichen x zugelassen, es ist aber immer noch $l = 3b$.

e) Für welches b liegt das maximale Volumen für $x = 17$ LE (= Längeneinheiten) vor? Wie groß ist dieses dann?

Lösung:

a) Wir suchen ein möglichst großes Volumen. Wir beachten, weil OBdA $l \geq b$ gilt, dass nur Werte $0 \leq x \leq b/2$ Sinn machen, da sonst gar keine Schachtel entsteht (Vergleiche Figur 1). Das Volumen der Schachtel ist

$$V(x) = (l - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot x\,,$$

was wir mit Figur 1 erkennen können. Dieses gilt es nun zu maximieren. Wir bilden hierzu die erste Ableitung (zweifache Produktregel) der gefundenen Zielfunktion:

$$\begin{aligned} V'(x) &= -2(b-2x)x - 2(l-2x)x + (l-2x)(b-2x) \\ &= -2bx + 4x^2 - 2lx + 4x^2 + lb - 2lx - 2bx + 4x^2 \\ &= 12x^2 - 4(b+l)x + lb = 0. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Nullstellen mit der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{4(b+l) \pm \sqrt{16(b+l)^2 - 48lb}}{24} = \frac{4(b+l) \pm \sqrt{16b^2 - 16bl + 16l^2}}{24} \\ &= \underbrace{\frac{b + l \pm \sqrt{b^2 - bl + l^2}}{6}}_{(1)} \underset{l=4b}{=} \frac{5b \pm \sqrt{13b^2}}{6} = \frac{5b \pm \sqrt{13}b}{6}. \end{aligned}$$

Nach der am Anfang angestrengten Überlegung zu den möglichen Werten von x, haben wir

$$x = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} b$$

zu wählen. Setzen wir dies in die zweite Ableitung

$$V''(x) = 24x - 4(b + 4b) = 24x - 20b$$

ein, so erhalten wir

$$V''\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}b\right) \approx -14{,}4b < 0 \Rightarrow \text{ Maximum liegt vor.}$$

Da die Randwerte beide 0 sind, liegt also das gesuchte, globale Maximum vor.

b) Es gebe für $x = d$ ein Volumen

$$V = (l - 2d)(b - 2d)d\ .$$

Damit ist x nun nicht mehr die Laufvariable. Wir wissen zusätzlich, dass $2l + 2b = U$ fest bleibt. Damit ist

$$l = \frac{U}{2} - b\,.$$

Dies setzen wir in die Volumenformel ein und erhalten

$$V(b) = \left(\frac{U}{2} - b - 2d\right)(b - 2d)d\ .$$

Wir leiten ab (Produktregel, Laufvariable ist b):

$$V'(b) = -(b - 2d)d + \left(\frac{U}{2} - b - 2d\right)d = 0\,.$$

Wir lösen nach b auf (zuerst durch d teilen):

$$-b + 2d + \frac{U}{2} - b - 2d = 0 \Rightarrow 2b = \frac{U}{2} \underset{U=2l+2b}{\Rightarrow} 2b = b + l \Rightarrow l = b\,.$$

Die Seiten haben das Verhältnis $1:1$ zueinander, es liegt also ein Quadrat vor.

c) Analoge Vorgehensweise wie in Aufgabenteil b): Es gebe für $x = d$ ein Volumen

$$V = (l - 2d)(b - 2d)d \,.$$

Damit ist x nun nicht mehr die Laufvariable. Wir wissen zusätzlich, dass nun $l \cdot b = A$ fest bleibt. Damit ist

$$l = \frac{A}{b}.$$

Dies setzen wir in die Volumenformel ein und erhalten

$$V(b) = \left(\frac{A}{b} - 2d\right)(b - 2d)d \,.$$

Wir leiten ab (Produktregel, Laufvariable ist b):

$$V'(b) = -\frac{A}{b^2}(b - 2d)d + \left(\frac{A}{b} - 2d\right)d = 0\,.$$

Wir lösen nach b auf (zuerst durch d teilen) und setzen $A = l \cdot b$ wieder ein:

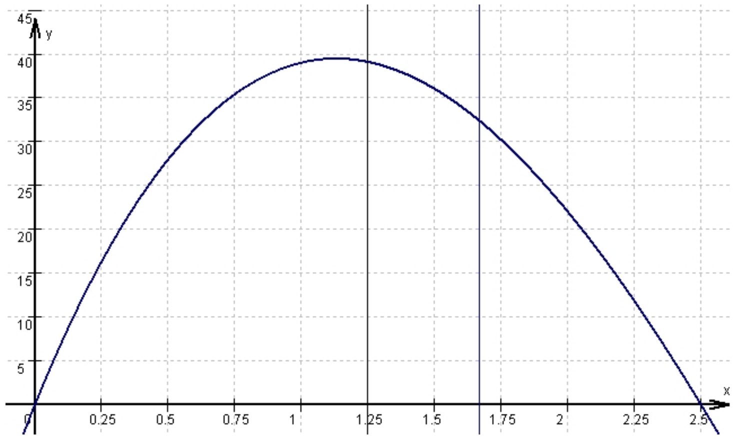
$$-\frac{lb}{b^2}(b - 2d) = -\frac{lb}{b} + 2d \Rightarrow l - 2d\frac{l}{b} = l - 2d \Rightarrow \frac{l}{b} = 1\,.$$

Die Seiten haben wieder das Verhältnis $1:1$ zueinander, es liegt also ein weiteres Mal ein Quadrat vor.

d) Wir nehmen Gleichung (1) her und erhalten

$$x_E = \frac{b + l - \sqrt{b^2 - bl + l^2}}{6} \underset{l=3b}{=} \frac{4b - \sqrt{7b^2}}{6} = \frac{4 - \sqrt{7}}{6}b\,.$$

Einsetzen in die zweite Ableitung zeigt, dass es ein Maximum ist. Es liegt allerdings nicht innerhalb des vorgegebenen Intervalls für x, da $x_E = 0{,}2257081148 \cdot b$ (siehe Figur 2).



Figur 2: Beispiel zu dem im Text Gesagten mit $b = 5$ und $l = 15$.

Deswegen haben wir nun die Randwerte zu berechnen und diese sind

$$V\left(\frac{b}{4}\right) = \left(b - 2\frac{b}{4}\right)\left(3b - 2\frac{b}{4}\right)\frac{b}{4} = 0{,}3125b^3,$$

und

$$V\left(\frac{b}{3}\right) = \left(b - 2\frac{b}{3}\right)\left(3b - 2\frac{b}{3}\right)\frac{b}{3} = 0,\overline{259}b^3.$$

Damit liegt das Maximum für $x = \frac{b}{4}$ vor, denn innerhalb des Intervalls kann es keinen größeren Wert geben, sonst hätten wir ihn mit der ersten Ableitung gefunden (Wer es ganz genau haben will, kann eine Monotonieuntersuchung durchführen!).

e) Wir hatten in d)

$$x_E = \frac{b + l - \sqrt{b^2 - bl + l^2}}{6} \underset{l=3b}{=} \frac{4b - \sqrt{7b^2}}{6} = \frac{4 - \sqrt{7}}{6} b$$

berechnet. Für $x_E = x = 17$ LE folgt damit

$$b = \frac{6x}{4 - \sqrt{7}} = \frac{6 \cdot 17}{4 - \sqrt{7}} \approx 75{,}3185 \text{ LE}.$$

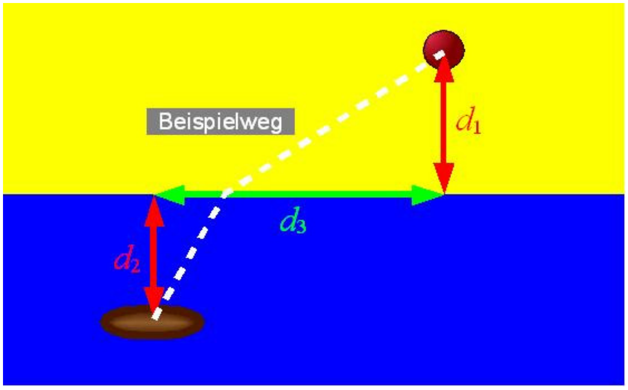
Mit $l = 3b \approx 225{,}9555$ LE, erhalten wir dann mit

$$V \approx 134832{,}4 \text{ VE (= Volumeneinheiten)}$$

das gesuchte Volumen.

□

Aufgabe A2 (Minimierungsproblem am Strand):



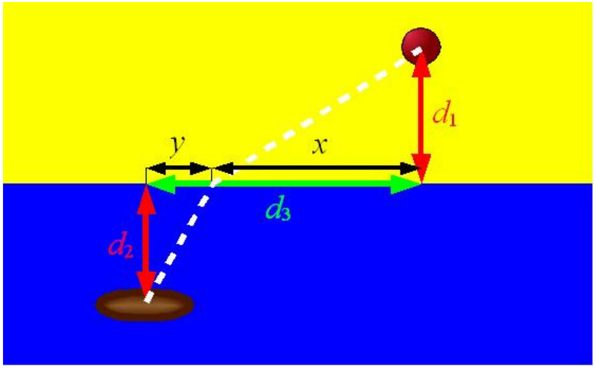
Figur 1: Skizze zu dem beschriebenen „Strandproblem“.

Ein extrem engagierter Bademeister (der zufällig ein Diplom in Mathematik besitzt und einen graphischen Taschenrechner dabei hat) sitzt auf seinem Ausguck, welcher sich in der Entfernung $d_1 = 35$ Meter zum Meeresrand befindet. Mit dem konstanten Abstand $d_2 = 50$ Meter zum Ufer zieht ein Boot auf Höhe seines Ausgucks vorüber. Als es eine Strecke $d_3 = 200$ Meter (siehe Skizze), zurückgelegt hat, kippt es aus unbekannten Gründen um. Der Bademeister springt sofort von seinem Ausguck herunter und eilt zu Hilfe. An Land bewegt er sich mit der Geschwindigkeit $v_L = 24 \frac{km}{h}$ vorwärts, im Wasser schafft er wegen starkem Wellengang nur noch etwa 40% der Landgeschwindigkeit.

Welchen Weg nimmt er (da er es ja extrem schnell ausrechnen kann, siehe oben angegebene Qualifikation), um in möglichst kurzer Zeit bei den Hilfsbedürftigen zu sein? Stellen Sie hierzu die zu minimierende Funktion auf und schreiben Sie die notwendige Bedingung für ein Minimum explizit für diese Funktion nieder (Ableitung!). Falls Sie einen GTR, PC mit entsprechenden Programmen oder ähnliches zur Hand haben, können Sie die benötigte Zeit und die Länge des zurückgelegten Weges berechnen lassen (Dies ist aber nicht verlangt!).

Lösung:

Wir betrachten zur Lösung der Aufgabe die folgende Skizze:



Figur 2: Ergänzung der vorgegebenen Skizze.

Der Bademeister gehe, wie in der Skizze in Figur 2 gezeigt, an einer bestimmten Stelle ins Wasser. Dann hat er nach eben jener Skizze an Land den Weg

$$s_L(x) = \sqrt{d_1^{\;2} + x^2}$$

zurückgelegt und er hat dafür die Zeit

$$t_L(x) = \frac{s_L}{v_L} = \frac{1}{v_L} \cdot \sqrt{d_1^{\;2} + x^2}$$

benötigt. Die gleichen Überlegungen lassen sich für den Wasserweg durchführen und wir erhalten

$$s_W(y) = \sqrt{d_2^{\;2} + y^2}$$

und

$$t_W(y) = \frac{s_W}{v_W} = \frac{1}{v_W} \cdot \sqrt{d_2^{\;2} + y^2}$$

mit der Geschwindigkeit $v_W = 0{,}4 \cdot v_L$ im Wasser. Da wir als Nebenbedingung $x + y = d_3$ gegeben haben, können wir die Wassergleichungen mit $y = d_3 - x$ umschreiben zu

$$s_W(x) = \sqrt{d_2^{\;2} + (d_3 - x)^2}$$

und

$$t_W(x) = \frac{1}{v_W} \cdot \sqrt{{d_2}^2 + (d_3 - x)^2} \ .$$

Die zu minimierende Funktion ist nun nach dem Aufgabentext die der Gesamtzeit t, wobei $0 \le x \le 200$ für die Laufvariable x gilt. Es ist

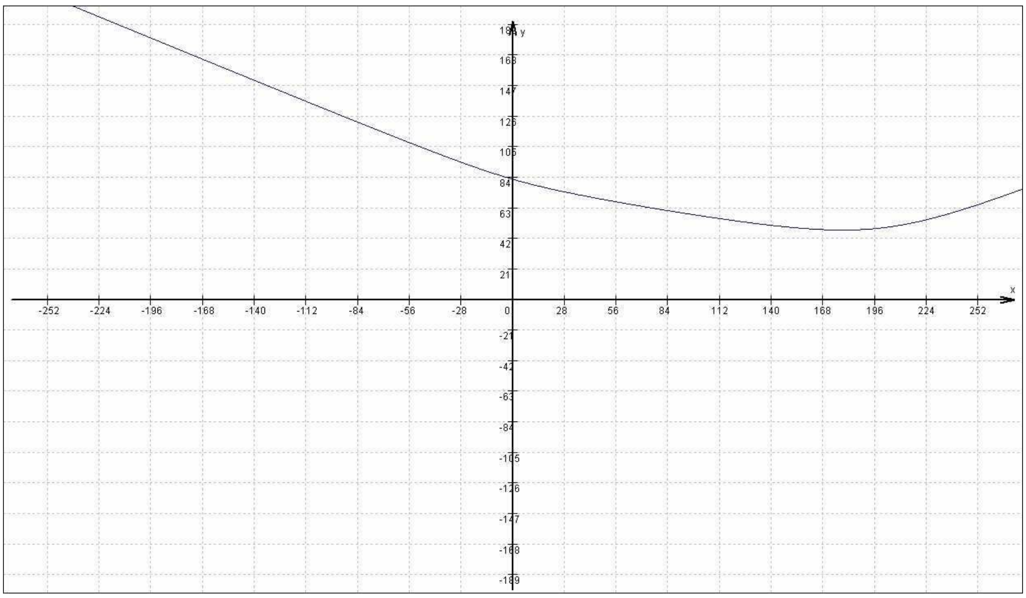
$$t(x) = t_L(x) + t_W(x) = \frac{1}{v_L} \cdot \sqrt{{d_1}^2 + x^2} + \frac{1}{v_W} \cdot \sqrt{{d_2}^2 + (d_3 - x)^2} \ .$$

Die notwendige Bedingung lautet $t'(x) = 0$, was hier explizit

$$t'(x) = \underbrace{\frac{x}{v_L \sqrt{{d_1}^2 + x^2}}}_{\text{einfache Kettenregel}} - \underbrace{\frac{(d_3 - x)}{v_W \sqrt{{d_2}^2 + (d_3 - x)^2}}}_{\text{zweifache Kettenregel}} = 0$$

ergibt.

Eine Untersuchung mit einem graphischen Taschenrechner oder dergleichen fördert folgenden Graph von $t(x)$ für die vorgegebenen Werte zu Tage:



Figur 3: Verlauf der Zeitfunktion.

Die minimale Zeit ist $t_{MIN} \approx 47{,}695$ Sekunden und ergibt sich für $x_{MIN} \approx 178{,}660$ Meter.

Aufgabe A3 (Ableitungen, Umkehrfunktionen):
Berechnen Sie die Ableitungen.

a) $\arctan(x)$
b) $\ln(x)$
c) $\arccos(x)$

Lösung:

Verwende Formel $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$. Die Ableitung der Umkehrfunktion ergibt sich somit, indem wir f' berechnen und dann an der entsprechenden Stelle $x = f^{-1}(y)$ den Kehrwert bilden.

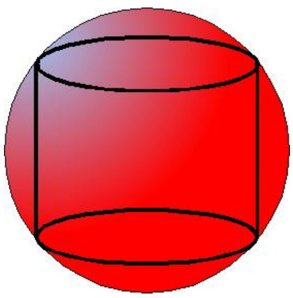
a) $\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

b) $\ln'(x) = \dfrac{1}{\exp'(\ln(x))} = \dfrac{1}{e^{\ln(x)}} = \dfrac{1}{x}$.

c) $\arccos'(x) = \dfrac{1}{\cos'\left(\arccos(x)\right)} = \dfrac{1}{-\sin\left(\arccos(x)\right)} \overset{\sin(x)=\sqrt{1-\cos^2(x)}}{=} \dfrac{1}{-\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos(x)\right)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

□

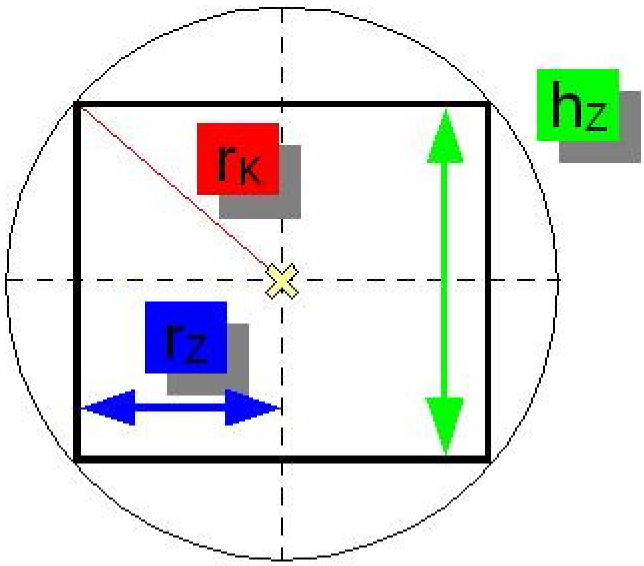
Aufgabe A4 (Extremwertproblem):
Einer Kugel K mit dem gegebenen Radius r_K werde ein Zylinder einbeschrieben (siehe Figur 1). Wie sind die Höhe h_Z und der Radius r_Z des Zylinders in Abhängigkeit von r_K zu wählen, damit die Mantelfläche des Zylinders maximal wird?



Figur 1: Kugel mit einbeschriebenem Zylinder.

Lösung:

Da sowohl der Zylinder, als auch die Kugel rotationssymmetrisch sind, können wir uns eine zweidimensionale Skizze anfertigen, die alle notwendigen Informationen enthält (siehe Figur 2).



Figur 2: Zylinder und Kugel von der Seite betrachtet.

Die Mantelfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$O_Z = \underbrace{2\pi r_Z h_Z}_{\text{Mantelfläche}} .$$

Momentan haben wir noch zwei Unbekannte in dieser Gleichung. Das wollen wir nun ändern. Mit Hilfe von Figur 2 können wir sehen, dass

$$r_Z^2 + \left(\frac{h_Z}{2}\right)^2 = r_K^2 \Leftrightarrow r_Z^2 = r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2 .$$

Durch die gegebenen Bedingungen gilt, dass $0 \le h_Z \le 2r_K$. Des weiteren ist $r_K > 0$. Wir setzen nun ein und erhalten

$$O_Z(h_Z) = 2\pi \cdot \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2} \cdot h_Z .$$

Diese Funktion leiten wir ab und setzen die Ableitung gleich 0.

$$O_Z'(h_Z) = 2\pi \cdot \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2} - 2\pi \frac{h_Z}{2\sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2}} \cdot \frac{1}{2}h_Z$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2} - \pi \frac{h_Z^2}{2\sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2}} = 0.$$

Wir dividieren anschließend durch π und multiplizieren mit dem Wurzelterm durch. Damit ergibt sich

$$2 \cdot \left(r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2\right) - \frac{h_Z^2}{2} = 0 \Leftrightarrow 2r_K^2 - h_Z^2 = 0 \Leftrightarrow 2r_K^2 = h_Z^2.$$

Indem wir die Wurzel ziehen, erhalten wir $h_Z = \sqrt{2} \cdot r_K$. Mit der zweiten Ableitung, welche da ist

$$O_Z''(h_Z) = \frac{2\pi h_Z \cdot \left(h_Z^2 - 6r_K^2\right)}{\sqrt{\left(4r_K^2 - h_Z^2\right)^3}},$$

sehen wir, dass wegen

$$O_Z''\left(\sqrt{2} \cdot r_K\right) = -4\pi r_K < 0$$

wirklich ein Maximum vorliegt. Da die Randwerte $h_{Z,R1} = 0$ und $h_{Z,R2} = 2r_K$ beide die Mantelfläche 0 liefern, liegt wirklich das gesuchte, globale Maximum vor. Es sind also

$$h_Z = \sqrt{2} \cdot r_K \text{ und } r_Z = \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} \cdot r_K\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_K.$$

Anmerkung: Damit ist der Zylinder in der Seitansicht (Figur 2) ein Quadrat.

□

Aufgabe A5 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit):

Gegeben sei die folgende, abschnittsweise definierte Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^x + 2 & x \leq 0, \\ ax^2 + b & x > 0. \end{cases}$$

Wie müssen a, b und c gewählt werden, damit die Funktion f

a) stetig

b) differenzierbar

ist?

Lösung:

a) <u>Stetigkeit</u>

Es ist $f(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$, also $c \cdot e^0 + 2 = a \cdot 0^2 + b \Leftrightarrow c + 2 = b$. Das ist die gesuchte Beziehung. Der Parameter a kann beliebig gewählt werden.

b) <u>Differenzierbarkeit</u>

Es ist

$$f'(x) = \begin{cases} c \cdot e^x & x \leq 0, \\ 2ax & x > 0. \end{cases}$$

Wir fordern also zusätzlich zu a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x)$, also $c \cdot e^0 = 2 \cdot a \cdot 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Damit ist $b = 2$, aber a kann nach wie vor beliebig gewählt werden.

□

Aufgabe A6 (Grenzwerte mit und ohne L'Hospital):

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x\cdot\ln(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right)^{\frac{1}{\ln\left(x^2\right)}}$

Lösung:

a) Hier funktioniert L'Hospital (Fall: $\frac{\infty}{\infty}$). Es ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0\,.$$

b) Hier verwenden wir die dritte Binomische Formel.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-x^2+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+1}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Der letzte Ausdruck in der zweiten Zeile kann auch wieder mit L'Hospital ausgewertet werden.

c) Hier funktioniert L'Hospital (Fall: $\frac{0}{0}$) zwei Mal. Es ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\cdot\cos(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot\sin(x)}{1}=1.$$

d) Für $x \to 0$ geht $x \cdot \ln x$ auch gegen 0, damit haben wir hier den Fall $\frac{0}{0}$ vorliegen. Es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x \cdot \ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\ln(x)+1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2(x)\cdot(\ln(x)+1)} = \text{"}\frac{1}{-\infty}\text{"} = 0.$$

e) Hier formen wir etwas um, dann ergibt sich der Grenzwert ganz von alleine. Wir verwenden die Tatsache, dass

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\cdot\ln(a)}.$$

Damit rechnen wir weiter.

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\right)^{\frac{1}{\ln(x^2)}} = \lim_{x\to 0}\left(e^{2\cdot\ln(x)}\right)^{\frac{1}{2\cdot\ln(x)}} = \lim_{x\to 0} e = e.$$

□