Stützkurs Mathematik WIW – Übungen Tag 3

Datum: 13.12.2010

*****LÖSUNGSVORSCHLAG*****

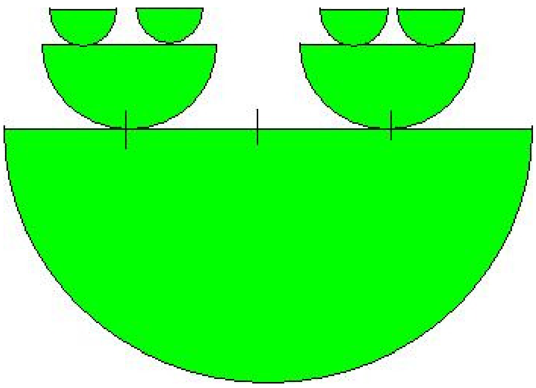
Themen:

Folgen, Reihen, Grenzwerte, Monotonie

Umfang:	3 Aufgaben
Hilfsmittel:	Sind keine notwendig. Eine Formelsammlung und ein nicht programmierbarer Taschenrechner können aber verwendet werden.

Aufgabe A1 (Abwandeln eines Halbkreises):

Gegeben sei das in Figur 1 angedeutete Gebilde.



Figur 1: Halbkreistürmchen.

Es entsteht, indem der anfängliche Halbkreis entlang seines Schnittdurchmessers d in vier gleich lange Abschnitte unterteilt wird und zwischen dem ersten und dem zweiten Abschnitt, sowie zwischen dem dritten und dem vierten Abschnitt je ein Halbkreis mit Durchmesser $d_1 = \frac{1}{3}d$ wie eine Schüssel aufgesetzt wird (siehe Figur 1). Dies ist nun ein Verfahrensschritt. Mit den neuen Halbkreisen handelt man in gleicher Weise, so dass man vier noch kleiner Halbkreise erhält (2. Verfahrensschritt), und mit diesen geht es ebenso weiter. Es sei nun n die Anzahl der durchgeführten Verfahrensschritte.

Zeigen Sie für $n \to \infty$:

a) Der Flächeninhalt des Gebildes ist begrenzt. Geben Sie den Grenzwert an.

b) Der Umfang des Gebildes ist begrenzt. Geben Sie den Grenzwert an.

c) Das Gebilde hat eine maximale Höhe. Geben Sie diese an.

Lösung:

a) Wir stellen zu Beginn eine rekursive definierte Folge auf, welche den Flächeninhalt im n-ten Schritt wiedergibt. Es ist

$$A_0 = \frac{1}{2}\pi r^2,$$

wobei $r = \frac{1}{2}d$ ist. Danach haben wir (mit einem gedrittelten Radius!)

$$A_1 = A_0 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{3}\right)^2 = A_0 + 2^1 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{3^1}\right)^2 = A_0 + \frac{2^1}{9^1} \cdot \frac{1}{2}\pi r^2.$$

Der nächste Schritt (erneute Drittelung) liefert

$$A_2 = A_1 + 4 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{9}\right)^2 = A_1 + 2^2 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{3^2}\right)^2 = A_1 + \frac{2^2}{9^2} \cdot \frac{1}{2}\pi r^2.$$

Somit können wir die folgende rekursive Folge festlegen, wenn wir weiterhin das Verfahren anwenden:

$$A_n = A_{n-1} + 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{3^n}\right)^2 = A_{n-1} + \frac{2^n}{9^n} \cdot \frac{1}{2}\pi r^2, \text{ mit } n = 1,2,3,4,\ldots.$$

Schreiben wir das n-te Folgeglied mit dem Summenzeichen, erhalten wir

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\pi \cdot 2^k \cdot \left(\frac{r}{3^k}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{9}\right)^k.$$

In der Summe können wir eine geometrische Reihe erkennen, so dass folgende Notation möglich wird:

$$A_n = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{9}{14}\pi r^2 \cdot \left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right).$$

Damit erhalten wir den Grenzwert $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{9}{14}\pi r^2$, da die Klammer gleich 1 wird.

b) Der Umfang ist zu Beginn gegeben durch

$$U_0 = d + \frac{d\pi}{2} = d \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Im nächsten Schritt ist (Anmerkung: Da der Kontakt der neuen Halbkreise mit den alten nur über einen Berührpunkt geschieht, bleibt U_0 komplett erhalten! Gleiches gilt für alle U_k mit $k = 1,2,3,4,...$!)

$$U_1 = U_0 + 2^1 \cdot \left(\frac{d}{3^1} + \frac{d\pi}{2 \cdot 3^1}\right).$$

In einem dritten Schritt ist

$$U_2 = U_1 + 2^2 \cdot \left(\frac{d}{3^2} + \frac{d\pi}{2 \cdot 3^2}\right).$$

Allgemein können wir also sagen, dass

$$U_n = U_{n-1} + 2^n \cdot \left(\frac{d}{3^n} + \frac{d\pi}{2 \cdot 3^n}\right), \text{ mit } n = 1,2,3,4,...$$

ist. Mit Hilfe des Summenzeichens erhalten wir

$$U_n = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k \cdot \left(\frac{d}{3^k} + \frac{d\pi}{2 \cdot 3^k}\right)\right) = \left(d + \frac{d\pi}{2}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Verwenden wir wieder den Tipp, so erhalten wir

$$U_n = \left(d + \frac{d\pi}{2}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(d + \frac{d\pi}{2}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \cdot \left(d + \frac{d\pi}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Der Grenzwert ist dann $U = \lim_{n \to \infty} U_n = 3 \cdot \left(d + \frac{d\pi}{2}\right)$. Die Klammer wird wieder 1.

c) Die Höhe berechnet sich nach analoger Vorgehensweise wie in den Aufgabenteilen a) und b) mit

$$H_n = \frac{d}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{d}{2} + \frac{1}{3^2}\cdot\frac{d}{2} + \ldots + \frac{1}{3^n}\frac{d}{2} = \frac{d}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{d}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3d}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Die Grenzwertbildung liefert $H = \lim\limits_{n\to\infty} H_n = \frac{3d}{4}$. Die Klammer wird wieder 1.

□

Aufgabe A2 (Entwicklung eines Kontostandes (rekursiv definierte Folge und vollständige Induktion)):

Herr Marx-Feuerbach betreibt mit seinem Konto, für welches er keine Zinsen bekommt, das folgende Spielchen:

Auf dem Konto sei zu Beginn kein Geld. Jeden Monat zahlt er nun 3000 € darauf ein und hebt anschließend sofort 20 % des vorhandenen Geldes ab.

a) Berechnen Sie die Kontostände nach der Durchführung seines Vorgehens für die ersten fünf Monate.

b) Stellen Sie eine rekursiv definierte Folge auf, durch welche sich der Kontostand sukzessive berechnen lässt.

c) Berechnen Sie den Kontostand, auf den sich sein Konto langfristig einpendelt.

d) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Folge der Kontostände durch die explizite Formel

$$K(n) = 12000\cdot\left(1-0{,}8^n\right) \text{ (mit } n = \{0,1,2,3,4,\ldots\} \text{ in Monaten)}$$

beschrieben wird.

Lösung:

a) Wir geben die ersten fünf Monate in einer Tabelle an:

Monat	Kontostand in €
1	$(0+3000)\cdot 0{,}8 = 2400$
2	$(2400+3000)\cdot 0{,}8 = 4320$
3	$(4320+3000)\cdot 0{,}8 = 5856$
4	$(5856+3000)\cdot 0{,}8 = 7084{,}80$
5	$(7084{,}80+3000)\cdot 0{,}8 = 8067{,}84$

Anmerkung: Der Abzug von $20\,\%$ entspricht der Multiplikation mit $1-0{,}2=0{,}8$.

b) Nach unserer Vorgehensweise können wir folgende rekursiv definierte Folge aufstellen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= (a_{n-1}+3000)\cdot 0{,}8 \end{aligned}$$

mit $n=\{1,2,3,4,\ldots\}$.

c) Die langfristige Entwicklung des Kontostandes entspricht dem Grenzwert der Folge. Es ist nun aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = g\,.$$

Damit folgt aus unserer rekursiven Folge aus Aufgabenteil b), dass

$$\begin{aligned} g &= (g+3000)\cdot 0{,}8 \\ g &= 0{,}8g + 2400 \quad \left|-0{,}8g\right. \\ 0{,}2g &= 2400 \quad \left|:0{,}2\right. \\ g &= 12000 \end{aligned}.$$

Langfristig hat er also mit 12000€ auf dem Konto zu rechnen.

d) Wir beweisen die Formel mittels vollständiger Induktion:

Induktionsanfang:

Es ist

$$K(0) = 12000 \cdot \left(1 - 0{,}8^0\right) = 12000 \cdot (1 - 1) = 0 = a_0 .$$

Damit gelingt der Induktionsanfang.

Induktionsschritt:

Laut der Formel müsste

$$K(n+1) = 12000 \cdot \left(1 - 0{,}8^{n+1}\right)$$

sein. Wir wissen, dass $a_{n+1} = (a_n + 3000) \cdot 0{,}8$ ist, also rechnen wir

$$(K(n) + 3000) \cdot 0{,}8 = \left(12000 \cdot \left(1 - 0{,}8^n\right) + 3000\right) \cdot 0{,}8 = 12000 \cdot \left(0{,}8 - 0{,}8^{n+1}\right) + \underbrace{2400}_{3000 \cdot 0{,}8}$$

$$= \underbrace{9600}_{12000 \cdot 0{,}8} + 2400 - 12000 \cdot 0{,}8^{n+1} = 12000 - 12000 \cdot 0{,}8^{n+1} = 12000 \cdot \left(1 - 0{,}8^{n+1}\right) = K(n+1).$$

Damit gelingt auch der Induktionsschritt.

Induktionsschluss:

Da der Induktionsanfang gelingt und der Induktionsschritt den Schluss auf $n = 1,2,3,4,5,6,...$ zulässt, ist gezeigt, dass die Formel die Folge beschreibt.

□

Aufgabe A3 (Monotonie und Beschränktheit bei Folgen):

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen.

a) (a_n) mit $a_n = \dfrac{n-1}{n^2 - 1}$.

b) (b_n) mit $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

c) (c_n) mit $c_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}$.

d) (d_n) mit $d_n = 2^{2+\frac{1}{n}}$.

e) (e_n) mit $e_n = \dfrac{2^n + 2^{-n}}{3^n}$.

f) (f_n) mit $f_n = \dfrac{n^2-1}{2\cdot(n+1)^2}$.

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie. Es gilt, solange nichts anderes notiert ist, dass $n \in \mathbb{N}$.

g) (g_n) mit $g_n = 2^n - (n-1)^2$.

h) (h_n) mit $h_n = \dfrac{2\cdot(n+3)^2+1}{2^n}$.

i) (i_n) mit $i_n = \dfrac{5n^3+n^2}{n^2+1}$.

j) (j_n) mit $j_n = n^2 + (-1)^n \cdot n + 1$.

k) (k_n) mit $k_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

l) (l_n) mit $l_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \cdot n$.

Lösung:

a) Da der Grad oben kleiner als der Grad unten ist, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2-1} = 0,$$

oder wir rechnen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

b) Mit Hilfe der dritten Binomischen Formel ist

$$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Nun ist leicht ersichtlich, dass

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 .$$

c) Wieder ist der Grad unten größer. Für $c_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{n}$ rechnen wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n} - 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 .$$

d) Hier ist nur der Exponent interessant. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} 2^{2+\frac{1}{n}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = 2^2 = 4 .$$

e) Ein wenig Umformen zeigt uns hier den Grenzwert.

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n + 2^{-n}}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n\cdot 2^n} = 0 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^n} = 0.$$

f) Der Grad ist hier oben und unten gleich, somit ist der Grenzwert der Quotient aus den Leitkoeffizienten.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2\cdot(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

g) Wie wenden das Differenzenkriterium an:

$$g_{n+1} - g_n = 2^{n+1} - n^2 - 2^n + (n-1)^2 = 2^{n+1} - 2^n - 2n + 1 = 2^n\cdot(2-1) - 2n + 1$$
$$= 2^n - 2n + 1$$

Da $2^n \geq 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $g_{n+1} - g_n > 0$ und damit die Folge streng monoton wachsend.

h) Hier nehmen wir das Quotientenkriterium:

$$\frac{h_{n+1}}{h_n}=\frac{2\cdot(n+4)^2+1}{2^{n+1}}:\frac{2\cdot(n+3)^2+1}{2^n}=\frac{2\cdot(n+4)^2+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2\cdot(n+3)^2+1}$$
$$=\frac{2\cdot(n+4)^2+1}{2\cdot\left(\sqrt{2}n+3\sqrt{2}\right)^2+2}<1.$$

Da der Nenner immer größer als der Zähler ist, beide aber positiv sind, ergibt sich immer ein positiver Quotient kleiner als 1. Damit fällt die Folge streng monoton.

i) Wir formen etwas um:

$$i_n=\frac{5n^3+n^2}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1}\cdot(5n+1).$$

Da

$$\frac{n^2}{n^2+1}<\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \text{ und } 5n+1<5(n+1)+1,$$

muss $i_{n+1}>i_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gelten. Die Folge wächst also streng monoton.

j) Wir verwenden das Differenzenkriterium:

$$j_{n+1}-j_n=(n+1)^2+(-1)^{n+1}\cdot(n+1)+1-n^2-(-1)^n-1=2n+1-(-1)^n\cdot(n+1)-(-1)^n n$$
$$=2n+1-2\cdot(-1)^n n-(-1)^n.$$

Ist n gerade, dann ist die Differenz der Folgenglieder gerade 0. Im anderen Fall ist sie $4n+2>0$. Damit wächst die Folge monoton.

k) Wir formen etwas um:

$$k_n=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Da $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $k_{n+1} < k_n$, womit die Folge streng monoton fällt.

l) Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (n+1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1 .$$

Damit fällt die Folge monoton für $n \geq 1$. Für $n > 1$ fällt sie sogar streng monoton.

□