Stützkurs Mathematik WIW – Übungen Tag 2

Datum: 06.12.2010

LÖSUNGSVORSCHLAG

Themen:

Analytische Geometrie und alles, was dazu gehört.

Umfang:	8 Aufgaben
Hilfsmittel:	Sind keine notwendig. Eine Formelsammlung und ein nicht programmierbarer Taschenrechner können aber verwendet werden.

Aufgabe A1 (Vektorgeometrie – Basistechniken):

Gegeben sind die drei Punkte $S_1(3/0/0)$, $S_2(0/4/0)$ und $S_3(0/0/6)$. Des Weiteren seien die beiden Punkte $P(1/1/1)$ und $Q(3/3/4)$ gegeben.

a) Stellen Sie die Gerade g, welche durch die Punkte P und Q geht, auf. Stellen Sie die Koordinatenform der Ebene E auf, in welcher die drei Punkte S_1, S_2, S_3 liegen.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E. Tun Sie dies mit und ohne Verwendung der Hesseschen Normalenform.

c) Wandeln Sie die in a) für E gefundene Koordinatenformdarstellung in eine Parameterdarstellung um.

d) Spiegeln Sie den Punkt Q an der Ebene E und geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes Q' an.

e) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes S_1 von der Geraden g.

f) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F an, welche parallel zu E ist und in der der Punkt P liegt.

Lösung:

a) Wir stellen die Gerade durch $P(1/1/1)$ und $Q(3/3/4)$ auf:

$$g:\vec{x}=\overrightarrow{OP}+t\cdot\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3-1\\3-1\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Bei der Ebene E können wir recht schnell zu einem Ergebnis kommen, denn mit $S_1(3/0/0)$, $S_2(0/4/0)$ und $S_3(0/0/6)$ sind die Spurpunkte der Ebene gegeben. Es ist dann sofort

$$E: \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 1 \underset{\cdot 12}{\Rightarrow} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12.$$

b) Mit Hesse:

Die Hessesche Normalenform für die Ebene E lautet

$$\text{HNF: } \frac{4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = 0.$$

Durch Einsetzen des Punktes erhalten wir

$$d(E,P) = \frac{|4+3+2-12|}{\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}} \approx 0{,}557 \text{ LE.}$$

Ohne Hesse:

Wir stellen eine Hilfsgerade h auf, welche senkrecht auf E steht und durch den Punkt P geht. Den senkrechten Richtungsvektor bekommen wir direkt aus der Koordinatenform der Ebene E. Er lautet

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir sofort die gesuchte Gerade h.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Diese lesen wir nun zeilenweise aus und setzen die Ausdrücke in die Ebene E ein. Es ist dann

$$4(1+4s)+3(1+3s)+2(1+2s)=12 \Rightarrow 29s=3 \Rightarrow s=\frac{3}{29}.$$

Setzen wir diesen Wert für den Parameter s in h ein, so erhalten wir den Punkt

$$S(1\tfrac{12}{29}/1\tfrac{9}{29}/1\tfrac{6}{29}).$$

Mit Hilfe dessen ergibt sich der Abstand des Punktes P zur Ebene E:

$$d(E,P)=\left|\overrightarrow{SP}\right|=\sqrt{\left(1-1\tfrac{12}{29}\right)^2+\left(1-1\tfrac{9}{29}\right)^2+\left(1-1\tfrac{6}{29}\right)^2}=\sqrt{\frac{12^2+9^2+6^2}{29^2}}=\sqrt{\frac{261}{29\cdot 29}}=\sqrt{\frac{9}{29}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{29}}\approx 0{,}557.$$

c) Die Koordinatenform lautet $E: 4x_1+3x_2+2x_3=12$. Wir schreiben um und erhalten

$$x_3=6-2x_1-1{,}5x_2.$$

Nun können wir das Folgende notieren:

$$\begin{array}{lcccccc} x_1 & = & & & 1x_1 & & \\ x_2 & = & & & & & 1x_2 \\ x_3 & = & 6 & - & 2x_2 & - & 1{,}5x_2 \end{array} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1{,}5\end{pmatrix}.$$

Das ist eine mögliche Parameterdarstellung der Ebene E.

d) Der Normalenvektor der Ebene E lautet

$$\vec{n}_E=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}.$$

Hiermit stellen wir die Hilfsgerade k durch Q auf. Es ist

$$k:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}.$$

Diese lesen wir zeilenweise aus und setzen in die Ebene E ein:

$$4(3+4r)+3(3+3r)+2(4+2r)=12 \Rightarrow 29r=-17 \Rightarrow r=-\frac{17}{29}.$$

Diesen Wert verdoppeln wir nun, damit wir von Q zu E und dann von E zu Q' laufen. Setzen wir dann $r^*=2r$ in die Hilfsgerade k ein, so erhalten wir

$$\vec{q}'=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}-2\cdot\frac{17}{29}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\frac{20}{29}\\-\frac{15}{29}\\1\frac{19}{29}\end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Punkt ist also der Punkt $Q'(-1\frac{20}{29}/-\frac{15}{29}/1\frac{19}{29})$.

e) Die Gerade g hat z.B. die Parameterdarstellung

$$g:\vec{x}=\overrightarrow{OP}+t\cdot\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3-1\\3-1\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Hieraus lesen wir sofort die (senkrechte) Hilfsebene

$$H:2x_1+2x_2+3x_3=d$$

ab. Durch Einsetzen des Punktes $S_1(3/0/0)$ ergibt sich

$$d=2\cdot 3+0+0=6 \Rightarrow H:2x_1+2x_2+3x_3=6.$$

Wir berechnen nun den Durchstoßpunkt der Geraden g durch die Ebene H.

Dazu lesen wir zeilenweise die Gerade g aus und setzen diese Ausdrücke in H ein. Es ist dann

$$2(1+2t)+2(1+2t)+3(1+3t)=6 \Rightarrow 17t=-1 \Rightarrow t=-\frac{1}{17}.$$

Damit erhalten wir den Durchstoßpunkt

$$\vec{d}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} \\ \frac{14}{17} \end{pmatrix}.$$

Der Abstand des Punktes S_1 zum Punkt D_H bzw. zur Geraden g ergibt sich hiermit zu

$$d(g, S_1) = \left|\overrightarrow{S_1 D_H}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{15}{17} - 3\right)^2 + \left(\tfrac{15}{17}\right)^2 + \left(\tfrac{14}{17}\right)^2} = \frac{\sqrt{1296 + 225 + 196}}{17} = \frac{\sqrt{1717}}{17} \approx 2{,}437 \text{ LE.}$$

f) Eine zu $E: 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$ parallele Ebene F hat die Gleichung

$$F: 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = f\,.$$

Setzen wir nun einen Punkt ein, von dem wir wissen, dass er auf F liegt, so erhalten wir f. Mit dem bekannten Punkt $P(1/1/1)$ folgt dann

$$4 + 3 + 2 = 9 = f \Rightarrow F: 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9\,.$$

Das ist die gesuchte Gleichung.

□

Aufgabe A2 (Ebene umwandeln):

Geben Sie eine Darstellung der Ebene $E: -x_1 + x_2 + 7x_3 = 22$ in der Normalenform an.

Lösung:

Aus der Koordinatenform lesen wir sofort den Normalenvektor ab. Dieser ist hier

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Nun wählen wir noch einen Punkt, z.B. $(0/8/2)$, welcher die gegebene Koordinatengleichung erfüllt. Es ist nämlich $-0+8+2\cdot 7=22$. Damit können wir eine Normalenformdarstellung angeben:

$$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\8\\2\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}-1\\1\\7\end{pmatrix}=0.$$

□

Aufgabe A3 (Ebene umwandeln):

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene $E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}-1\\3\\-9\end{pmatrix}=0$.

Lösung:

Wir geben zuerst die Koordinatenform an. Diese ist

$$-x_1+3x_2-9x_3=d\ .$$

Durch Einsetzen des Punktes erhalten wir $d=-1\cdot 2+3\cdot 0-9\cdot 1=-11$. Damit haben wir dann, nach der Multiplikation mit -1, die Koordinatenform

$$E:x_1-3x_2+9x_3=11.$$

Nun schreiben wir wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 11 & + & 3x_2 & - & 9x_3 \\ x_2 & = & & & x_2 & & \\ x_3 & = & & & & & x_3 \end{array}$$

Anders geschrieben:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-9\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Damit haben wir eine Parameterdarstellung gefunden.

□

Aufgabe A4 (Abstandsbestimmung Punkt-Ebene):

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(7/-4/3)$ von der Ebene $E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 = 54$ mit Hilfe der Hesseschen Normalenform.

Lösung:

Die Hessesche Normalenform der gegebenen Ebene lautet

$$\text{HNF: } \frac{4x_1 - 8x_2 + x_3 - 54}{\sqrt{4^2 + 8^2 + 1^2}} = 0.$$

Setzen wir den gegebenen Punkt ein, so erhalten wir den gesuchten Abstand:

$$d(E,P) = \frac{|4 \cdot 7 + 8 \cdot 4 + 3 - 54|}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

□

Aufgabe A5 (Abstandsbestimmung Punkt-Ebene):

Für welche t hat die Ebene $E_t: tx_1 + 3tx_2 - x_3 = -16$ den Abstand 1 vom Punkt $P(0/0/1)$?

Lösung:

Die Hessesche Normalenform lautet hier:

$$\text{HNF: } \frac{tx_1 + 3tx_2 - x_3 + 16}{\sqrt{t^2 + 9t^2 + 1}} = 0.$$

Wir setzen den gegebenen Punkt ein und fordern, dass der Abstand gleich 1 ist:

$$d(E_t,P) = 1 = \frac{|-1+16|}{\sqrt{10t^2+1}} \Rightarrow \sqrt{10t^2+1} = 15 \Rightarrow 10t^2 + 1 = 225 \Rightarrow t_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{112}{5}}.$$

□

Aufgabe A6 (Abstandsbestimmung Punkt-Punkt):

Welche Punkte der Punkteschar $P_t(t/8t+1/4t+3)$ haben vom Punkt $Q(0/1/3)$ den Abstand 27?

Lösung:

Wir berechnen den Abstand der beiden Punkte mit Hilfe der Punkt-Punkt-Abstandsformel. Es ist

$$\left|\overrightarrow{P_tQ}\right| = \sqrt{(t-0)^2 + (8t+1-1)^2 + (4t+3-3)^2} = \sqrt{81t^2} = \pm 9t = 27 \Rightarrow t_{1/2} = \pm 3.$$

Die zugehörigen Punkte sind dann $P_{-3}(-3/-23/-9)$ und $P_{+3}(3/25/15)$.

□

Aufgabe A7(Abstandsbestimmung Punkt-Gerade):

Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden an, von welcher die Punkte $A(2/0/0)$, $B(0/2/0)$ und $C(0/0/2)$ den gleichen Abstand haben.

Lösung:

Dadurch, dass die Spurpunkte gegeben sind, können wir sofort die Ebene aufstellen, in welcher diese Punkte liegen.

$$E: \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Der Normalenvektor ist hiermit $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun benötigen wir noch den Punkt in der Ebene, von dem alle drei Spurpunkte gleich weit entfernt sind. Dieses ist hier der Schwerpunkt, da das durch die Punkte festgelegte Dreieck ein gleichseitiges ist, was sich aus der Ähnlichkeit der Punkte ergibt (Man kann es auch über die Seitenlängen nachrechnen). Der Schwerpunkt ist gegeben durch

$$\vec{s} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

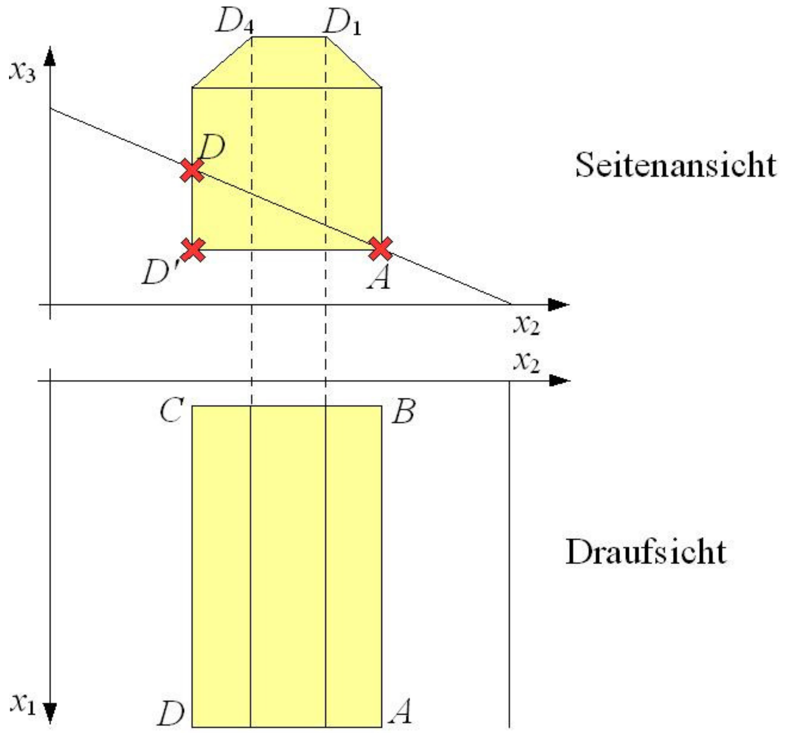
Die gesuchte Gerade ist somit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe A8 (Betrachtung baulicher Maßnahmen in einem Gelände):

An einem Hang soll ein Haus mit rechteckigem Grundriss gebaut werden (siehe Figur 1).



Figur 1: Seitenansicht und Draufsicht auf das Haus am Hang.

Der Punkt $A(30/15/5)$ liegt auf dem Hang (Maße in Metern gegeben). Das Haus soll 20 Meter lang und 10 Meter breit werden in der Draufsicht. Entlang der Breite des Hauses steigt der Hang um 4 Meter gleichmäßig über die ganze Länge. Das Haus soll allerdings parallel zum Boden ohne Hang seine Grundfläche haben.

a) Wo liegen die Ecken des Hauses? Wie groß ist die Steigung/ das Gefälle des Hangs in Grad? Wie viel Erde muss abgetragen werden, damit das Haus parallel zum Boden ohne Hang stehen kann?

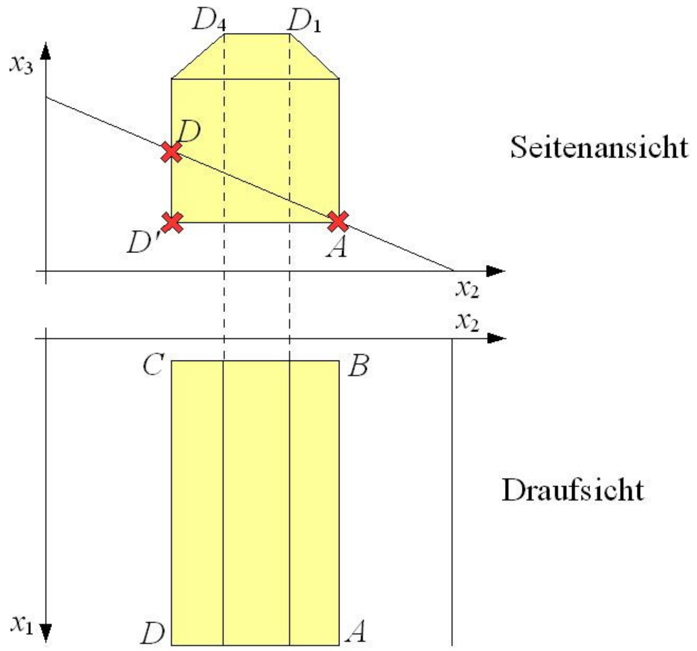
In der Draufsicht scheint es so, dass das Haus mit einer Gesamthöhe von 12 Metern durch die Form des 3 Meter hohen Daches in drei kongruente Rechtecke zerlegt wird (alle gleich lang und gleich breit, siehe Figur 1).

b) Bestimmen sie die Dachpunkte D_i mit $i = 1,2,3,4$ und die Oberfläche des Daches.

Über das Grundstück verläuft eine Hochspannungsleitung. Die beiden Strommasten stehen bei den Koordinaten $S_1(5/-5/13)$ bzw. $S_2(30/30/0)$ und sind jeweils 50 Meter hoch. Die Stromleitung verläuft geradlinig von einer Mastspitze zur anderen. Aus Sicherheitsgründen soll die Entfernung zwischen Dach und Leitung mindestens 35 Meter betragen.

c) Ist diese Bedingung immer erfüllt?

Lösung:



Figur 1: Nur zur Erinnerung.

a) Die Ecke $A(30/15/5)$ ist gegeben. Das Haus soll 20 Meter lang und 10 Meter breit sein. Die Länge wird in x_1-Richtung gemessen, die Breite in x_2-Richtung. Damit erhalten wir gemäß der Skizzen

- Punkt $B(30-20/15/5)=B(10/15/5)$,
- Punkt $C(10/15-10/5+4)=C(10/5/9)$,
- Punkt $C'(10/5/9-4)=C'(10/5/5)$,
- Punkt $D(10+20/5/9)=D(30/5/9)$,
- Punkt $D'(30/5/9-4)=D'(30/5/5)$.

Das Gefälle bzw. die Steigung des Hangs lässt sich hier einfach aus den Angaben berechnen ohne die analytische Geometrie bemühen zu müssen. Auf 10 Meter steigt der Hang 4 Meter und das gleichmäßig und über die ganze Länge des Hauses. Somit ist

$$\tan\alpha = \frac{4}{10} \Rightarrow \alpha \approx 21{,}8°$$

der Steigungswinkel.

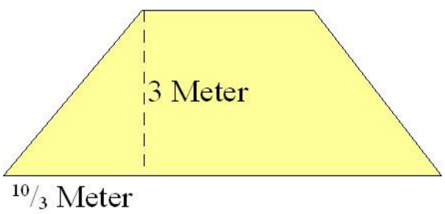
Das Volumen der abzutragenden Erde lässt sich durch ein Prisma mit dreieckiger Grundfläche berechnen. Diesen Sachverhalt können wir den Skizzen entnehmen. Es ist

$$V_{Erde} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10}_{Grundfläche}\cdot \overbrace{20}^{\substack{Höhe=Länge\\ Haus}} = 400 \text{ m}^3.$$

b) Die Dachpunkte bzw. ihre Verbindungskanten unterteilen die Draufsicht gleichmäßig. Somit müssen die Dachpunkte wie folgt liegen, wenn wir die Skizzen betrachten und die Größenangaben aus Aufgabenteil b) verwenden.

- Punkt $D_1(30/15-\frac{10}{3}/5+12) = D_1(30/11\tfrac{2}{3}/17)$,
- Punkt $D_2(30-20/11\tfrac{2}{3}/17) = D_2(10/11\tfrac{2}{3}/17)$,
- Punkt $D_3(10/11\tfrac{2}{3}-\frac{10}{3}/17) = D_3(10/8\tfrac{1}{3}/17)$,
- Punkt $D_4(10+20/8\tfrac{1}{3}/17) = D_4(30/8\tfrac{1}{3}/17)$.

Betrachten wir die Seitenansicht und die Draufsicht, so erkennen wir, dass alle drei Dachflächen Rechtecke der Länge 20 Meter sein müssen. Die Breite des mittleren Rechtecks ist sofort durch die Punkte gegeben und beträgt $^{10}\!/_3$ Meter. Für die Breite der anderen beiden betrachten wir Figur 2.

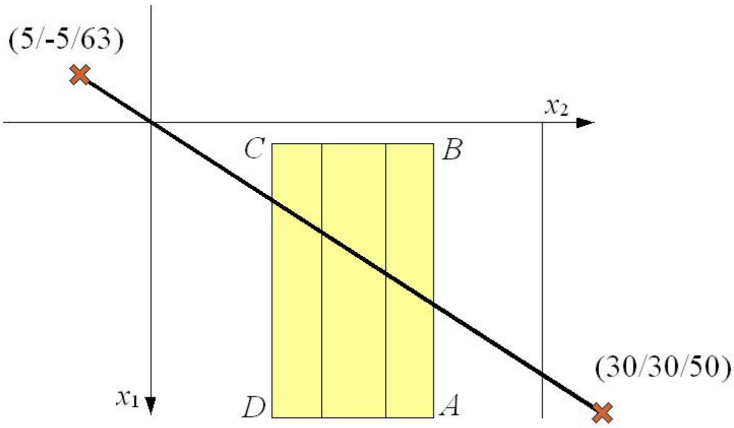


Figur 2: Für die Oberflächenberechnung des Daches.

Es ist die Breite gegeben durch $\sqrt{3^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2} \approx 4{,}485$ Meter. Damit erhalten wir eine Oberfläche von

$$O_{Dach} = 20 \cdot \left(\frac{10}{3} + 2 \cdot 4{,}458\right) \approx 246{,}05 \text{ m}^2.$$

c) Wir stellen zuerst die Geraden durch die Spitzen der beiden Masten, sowie durch die Dachpunkte gemäß Figur 1 auf. Das Problem kann durch die Betrachtung des Abstandes dieser windschiefen Geraden gelöst werden. Eine Skizze lohnt sich vielleicht, um die zu betrachtenden Geraden zu erkennen.



Figur 3: Skizze zum Verlauf der Hochspannungsleitung.

Die Spitzen der Strommasten liegen bei $S_{1S}(5/-5/13+50) = S_{1S}(5/-5/63)$ bzw. $S_{2S}(30/30/0+50) = S_{2S}(30/30/50)$.

- Strommastengerade: $g_S : \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -35 \\ 13 \end{pmatrix}$.
- Gerade durch D_1 und D_2: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 11\frac{2}{3} \\ 17 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Gerade durch D_3 und D_4: $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 8\frac{1}{3} \\ 17 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen nun wie folgt den Abstand der beiden Dachgeraden zur Strommastengeraden:

1. Die Differenz zwischen den Stützpunkten der Geraden bilden.
2. Einen Vektor berechnen, der zu beiden Richtungsvektoren senkrecht ist.
3. Diesen Vektor normieren.
4. Skalarprodukt des normierten Vektors aus Punkt 3 und der Differenz aus Punkt 1 bilden.
5. Wenn Ergebnis negativ, dann den Betrag nehmen.

Für die Geraden g_1 und g_S :

1. Es ist $\begin{pmatrix} 30-30 \\ 30-11\frac{2}{3} \\ 50-17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18\frac{1}{3} \\ 33 \end{pmatrix} = \vec{q}$.

2. Wir berechnen einen zu beiden Richtungsvektoren senkrechten Vektor mit dem Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -25 \\ -35 \\ 13 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -260 \\ -700 \end{pmatrix}.$$

3. Normiert: $\vec{n}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{13^2+35^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 35 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{1394}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 35 \end{pmatrix}$.

4. Es ist dann $\vec{n}_0 \bullet \vec{q} \approx 37{,}32$ Meter.

Für die Geraden g_2 und g_S :

Die analoge Vorgehensweise (sogar gleiches Kreuzprodukt liegt vor, also Arbeit gespart) liefert einen Abstand von $38{,}48$ Metern.

Da beide Abstände größer als die geforderten 35 Meter sind, ist die Bedingung immer erfüllt.