Grundlagen

Betrachtet wird eine Funktion $\underline{z} = f(t)$ mit $f\colon\ R \to C$, die einen **reellwertigen Parameter** t auf eine **komplexwertige Größe** $\underline{z}$ abbildet. Die geometrischen Orte aller Werte, die $\underline{z}$ bei Variation von t annimmt, nennt man **Ortskurve**.

Das Bezeichnen einer Ortskurve mit Werten des Parameters t nennt man „**parametrieren**".

> Ortskurven bieten den großen **Vorteil**, dass man sowohl **Betrag und Phase** als auch **Real- und Imaginärteil** des Funktionswertes für beliebige Werte des Parameters einfach ablesen kann. Außerdem erlaubt die **prinzipielle Form einer Ortskurve** oftmals Rückschlüsse auf wichtige **Eigenschaften** des durch sie beschriebenen **Systems** (z.B. Stabilität, Resonanzfrequenzen). Ortskurven spielen in Physik und Technik eine große Rolle, u.a. in der Sinusstromtechnik, der System- und Regelungstechnik.

Ortskurven können für komplizierte Funktionen f mittels geeigneter Software gezeichnet oder für relativ einfache Funktionen f **schrittweise geometrisch konstruiert** werden.

Häufig verwendete Operationen bei der schrittweisen Konstruktion von Ortskurven

- **Addition zweier Ortskurven**
  Erfolgt durch **punktweise** geometrische Addition der Werte, die die beiden Ortskurven jeweils **für gleiche Werte des Parameters** liefern.
- **Multiplikation einer Ortskurve mit einem positiven Skalar**
  Erfolgt durch **zentrische Streckung** der gesamten Ortskurve.
- **„Inversion" einer Ortskurve (d.h. Kehrwertbildung)**
  Erfolgt punktweise halbgeometrisch oder rein geometrisch (siehe unten).
  Für einige elementare Ortskurven (siehe Tabelle 1) ist die Form der inversen Ortskurve bekannt. Ist die ursprüngliche Ortskurve nur ein Teil einer elementaren Ortskurve (z.B. eine Halbgerade oder ein Kreisbogensegment), so ist die inverse Ortskurve natürlich auch nur ein Teil einer elementaren Ortskurve.

Tabelle 1: Elementare Ortskurven und ihre Inversen

Fall	Elementare Ortskurve	Inverse der Ortskurve
1	**Gerade**, die durch den Ursprung verläuft	**Gerade**, die durch den Ursprung verläuft
2	**Gerade**, die **nicht** durch den Ursprung verläuft	**Kreis**, der durch den Ursprung verläuft
3	**Kreis**, der durch den Ursprung verläuft	**Gerade**, die **nicht** durch den Ursprung verläuft
4	**Kreis**, der **nicht** durch den Ursprung verläuft	**Kreis**, der **nicht** durch den Ursprung verläuft

Inversion einer Ortskurve

Ausgehend von der Darstellung $\underline{z} = r\,e^{j\varphi}$ **eines** (beliebigen) **Punktes** auf der Ortskurve lässt sich die Lage des entsprechenden **Punktes** auf der inversen Ortskurve leicht ermitteln aus

$$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{r\,e^{j\varphi}} = \frac{1}{r}\,e^{-j\varphi}.$$

Es ist also der **Kehrwert des Betrages** zu bilden und das **Vorzeichen des Argumentes umzukehren** (was einer Spiegelung an der reellen Achse entspricht).

Inversion der elementaren Ortskurven

Die Inversion der Ortskurven aus Tabelle 1 ist besonders einfach, da nur wenige Stützpunkte ermittelt werden müssen, um die gesamte invertierte Ortskurve zeichnen zu können:

Fall 1: Inversion eines Punktes reicht aus.

Fall 2: Inversion des Punktes der Geraden, der dem Ursprung am nächsten ist, reicht aus. Er ergibt den Punkt des Kreises, der dem Ursprung am fernsten ist. Der Mittelpunkt des Kreises liegt in der Mitte zwischen Ursprung und dem erhaltenen Punkt.

Fall 3: Inversion des Punktes des Kreises, der dem Ursprung am fernsten ist, reicht aus. Er ergibt den Punkt der Geraden, der dem Ursprung am nächsten ist. Die Gerade steht senkrecht auf der Strecke zwischen dem erhaltenen Punkt und dem Ursprung.

Fall 4: Die Inversion des dem Ursprung nächsten und des dem Ursprung fernsten Punktes reicht aus. Sie ergeben den dem Ursprung fernsten bzw. nächsten Punkt des invertierten Kreises. Der Mittelpunkt des Kreises liegt in der Mitte zwischen diesen Punkten.

Verfahren zur rein geometrischen, punktweisen Inversion von Ortskurven

Der zu invertierende Punkt liege außerhalb des Einheitskreises.

1. Einheitskreis um den Ursprung einzeichnen.
2. Zeiger $\underline{z}$ vom Ursprung zum betrachteten Punkt auf der Ortskurve einzeichnen.
3. Die beiden Tangenten vom Endpunkt des Zeigers $\underline{z}$ an den Einheitskreis konstruieren.
4. Die Berührpunkte der Tangenten mit dem Einheitskreis durch eine Gerade verbinden.
5. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Zeiger $\underline{z}$ ist der Endpunkt des Zeigers $1/\underline{z}^*$.
6. Den Zeiger $1/\underline{z}^*$ an der reellen Achse spiegeln.

Liegt der zu invertierende Punkt innerhalb des Einheitskreises, so sind die Schritte 2. bis 5. geometrisch sinngemäß in umgekehrter Reihenfolge durchzuführen.

Parametrierung von Ortskurven

Ortskurven, die die Form einer **Geraden** (oder eines Teils davon) haben, können **linear oder nichtlinear parametriert** sein.

Ortskurven, die die Form eines **Kreises** (oder eines Teils davon) haben und **durch den Ursprung** gehen, sind **immer nichtlinear parametriert**.

Die Parametrierung eines Kreises, der durch Inversion einer **linear** geteilten Geraden entstanden ist, mittels einer **Parametrierungsgeraden** ist gemäß folgender Vorschrift sehr einfach möglich, sofern der Kreis grafisch gegeben ist und **Werte des Parameters** $\neq \infty, -\infty$ **an mindestens zwei Punkten des Kreises bekannt** sind:

Verfahren zur Parametrierung eines Kreises durch den Ursprung

1. Tangente an den Kreis im Punkt für den Parameterwert $\rightarrow \infty$ einzeichnen.
2. Auf der Seite der Tangente, auf der der Kreis liegt, eine Parallele zur Tangente einzeichnen. Diese Gerade ist die **Parametrierungsgerade**.
3. Für **zwei beliebige** Punkte des Kreises, für die der Wert des Parameters ($\neq \infty, -\infty$) bekannt ist, vom Ursprung aus Strahlen durch diese Punkte einzeichnen. (Falls die Punkte für die Parameterwerte 0 und 1 im Endlichen eingetragen sind, sollten diese gewählt werden.)
4. An den Schnittpunkten dieser Strahlen mit der Parametrierungsgeraden die beiden Werte des Parameters auf die Parametrierungsgerade übertragen.
5. Mittels der zwei Punkte der Parametrierungsgeraden, für die die Parameterwerte nun bekannt sind, die gesamte Parametrierungsgerade **linear** einteilen.
6. Nun kann der Wert des Parameters für einen beliebigen Punkt des Kreises dadurch ermittelt werden, dass vom Punkt des Kreises für den Parameterwert $\rightarrow \infty$ aus ein Strahl durch den betrachteten Punkt gezeichnet und der Wert des Parameters am Schnittpunkt dieses Strahls mit der Parametrierungsgeraden abgelesen wird.