BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Übungsaufgaben
Matrizenrechnung, LGS, Determinanten

Dipl.-Math. M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

VI Aufgaben

1 Matrizen 1

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Matrix $\underline{X}$ aus folgender Gleichung

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} - 2\left\{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \underline{X}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Ermitteln Sie $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ aus folgendem Gleichungssystem

$$3\underline{X} - 2\underline{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 4\underline{X} + \underline{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Matrix $\underline{A}_{(3,3)}$ mit den Elementen

$$a_{ik} = \left\{\begin{array}{lll} i-1 & \text{für} & i < k \\ i+1 & \text{für} & i \geq k \end{array}\right\}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Matrix $\underline{A}_{(4,4)}$, deren Elemente a_{ik} folgende Bedingungen erfüllen:

$$a_{ik} = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{für} & i = k \\ 2 & \text{für} & i = k-2 \\ 3 & \text{für} & i = k+2 \\ 4 & \text{sonst} & \end{array}\right\}$$

Aufgabe 5

Die Elemente einer $(3,3)$-Matrix sind gegeben durch

$$a_{ik} = (i-3)(2k-4) \quad \{\text{ für } i = 1,2,3; \;\; k = 1,2,3\}$$

Berechnen Sie $s = \sum_{n=1}^{3} a_{nn}$

Aufgabe 6

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \; ; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Matrizenprodukte

a) $\underline{A} \cdot \underline{B}$	b) $\underline{B} \cdot \underline{A}$	c) $\underline{A} \cdot \underline{C}$	d) $\underline{C} \cdot \underline{A}$	e) $\underline{A} \cdot \underline{D}$
f) $\underline{D} \cdot \underline{A}$	g) $\underline{B} \cdot \underline{C}$	h) $\underline{C} \cdot \underline{B}$	i) $\underline{B} \cdot \underline{M}$	k) $\underline{M} \cdot \underline{B}$
l) $\underline{D} \cdot \underline{M}$	m) $\underline{M} \cdot \underline{D}$	n) $\underline{A}^2$	o) $\underline{B}^2$	p) $\underline{C}^2$

Aufgabe 7

Bestätigen Sie die Gültigkeit des Gesetzes $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$ für

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} ; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrizenform

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & = & 0 \\ & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \end{array}$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} ; \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie das Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ausführlich an.

Aufgabe 9

Zeigen Sie: Zwischen den Matrizen (Pauli - Spin-Matrizen)

$$\underline{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \; \underline{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} ; \; \underline{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bestehen die folgenden Beziehungen ($\underline{E}$ ist die Einheitsmatrix; j ist die imaginäre Einheit mit der Eigenschaft $j^2 = -1$)

$$\text{a) } \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = j \cdot \underline{S}_3 \; ; \; \text{b) } \underline{S}_2 \cdot \underline{S}_1 = -j \cdot \underline{S}_3 \; ; \; \text{c) } \underline{S}_1^2 = \underline{S}_2^2 = \underline{S}_3^2 = \underline{E}$$

Aufgabe 10

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & q & 2 & -1 \\ -2 & p & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \underline{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Element d_{23} der Matrix $\underline{D} = \underline{C}_1 \cdot \underline{C}_2$

Aufgabe 11

Gegeben sind die Matrizen $\quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} ; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

Welcher Bedingung müssen die reellen Parameter p und q genügen, damit gilt

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} \ ?$$

Aufgabe 12 $\quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{A}^4 = ?$

Aufgabe 13 $\quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{A}^6 = ?$

Aufgabe 14 $\quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{B}^2 = ?$

Aufgabe 15

Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & p \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Wie muss man die reellen Parameter p, q wählen, damit gilt $\underline{A}^T \cdot \underline{A} = 2\,\underline{E}$?

Aufgabe 16

Für welche Matrix $\underline{B} = (b_{ik})$ gilt

$$\underline{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 17

Wie muss man den Parameter c in der Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$ wählen, damit die Gleichung $x^2 - 12xy + y^2 = 72$ durch die Matrixgleichung $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 72$ dargestellt wird ?

2 Determinanten

Aufgabe 18

Welche Werte von x, y, z erfüllen die Gleichungen ?

a) $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} y^2 & 4 & 9 \\ y & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\left| \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$

Aufgabe 19

Berechnen Sie die Determinanten

a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$

Aufgabe 20

Berechnen Sie die Determinanten

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 17 & 1 & -3 & 0 \\ -14 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 21

Berechnen Sie die Determinante $D = \begin{vmatrix} e^x + e^{-x} & e^x - e^{-x} \\ e^x - e^{-x} & e^x + e^{-x} \end{vmatrix}$

Aufgabe 22

Wie muss x gewählt werden, damit folgende Gleichung gilt

$$\begin{vmatrix} e^{-x} & 1 & -1 \\ 0 & 3e^{x} & e^{-x} \\ 0 & e^{x} & e^{-2x} \end{vmatrix} = 0 \ ?$$

Aufgabe 23

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y &= a \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y &= b \end{aligned}$$

3 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 24

Gegeben ist die allgemeine $(3,3)$-Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\underline{A} \cdot \underline{x}_i$ für folgende Vektoren

$$\text{a) } \underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ \text{b) } \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ \text{c) } \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie das Ergebnis in Worten!

Aufgabe 25

Für welche Werte des reellen Parameters p existieren Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 9x - 6y &= p \\ -6x + 4y &= 2 \end{aligned} \quad ?$$

Aufgabe 26

Schneiden sich folgende Geraden in einem Punkt? (Rechnung und Skizze!)

$$\text{a) } \begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ 3x + y &= 9 \\ x + 4y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{b) } \begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ x + 2y &= 4 \\ x - 5y &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 27

Wieviele Lösungen haben die Gleichungssysteme?

a) $$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 28

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ p^2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte des reellen Parameters p ist das Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lösbar? Wie lauten jeweils die Lösungen?

Aufgabe 29

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 0 \\ x_3 + x_4 \qquad &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 30

a) Welcher Bedingung müssen p, q, r genügen, damit das lineare Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \; ; \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$, lösbar ist ?

b) Welcher Wert ergibt sich für r, falls man $p = 1$ und $q = 0$ setzt ?

c) Wie lautet die allgemeine Lösung für die speziellen Werte p, q, r aus Teil b) ?

Aufgabe 31

Für welche Werte von p ist $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ nichttrivial lösbar?

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix}$ b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} (2-p) & 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & (3-p) & -\frac{4}{3} \\ 3 & 3 & -(1+p) \end{pmatrix}$

Lösung ? Lösung für $p = 2$?

Aufgabe 32

Für welche Werte des Parameters a hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

a) keine Lösung, b) unendlich viele Lösungen, c) eine eindeutige Lösung ?

Aufgabe 33

Gegeben sind die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} 6y_1 - 5y_2 &= 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 8 \\ -2y_1 + 3y_2 &= -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - 2y_2 + \tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2} \\ z_2 &= 4y_2 + x_2 - 2 \\ z_3 &= 2y_1 + \tfrac{1}{2}x_1 + 2x_3 - 1 \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichungen in Matrixform

$$\underline{A}\,\underline{y} = \underline{B}\,\underline{x} + \underline{a}\,; \quad \underline{z} = \underline{C}\,\underline{y} + \underline{D}\,\underline{x} + \underline{b}$$

geschrieben werden können. Wie lauten die Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ und die Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$?

b) Bringen Sie die Gleichungssysteme in die Form $\underline{z} = \underline{R}\,\underline{x} + \underline{c}$

c) Für welche x-Werte ergeben sich die z-Werte $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$?

4 Matrizen 2

Aufgabe 34

Bestimmen Sie die reellen Parameter p, q, r so, dass die Matrizen

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} p & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -q \\ r & 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} p & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & r \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$2(\underline{M}^T + \underline{N}) - (\underline{N}^T + 3\underline{E}) = \underline{0} \qquad (\underline{E} \text{ ... Einheitsmatrix})$$

erfüllen.

Aufgabe 35

Berechnen Sie die skalaren Größen r, s, t aus der Matrixgleichung

$$r\,\underline{E} + s\,\underline{A} + t\,\underline{A}^2 = \underline{0}$$

mit $\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$; $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 36

a) Berechnen Sie die Matrix $\underline{X}$ aus der Gleichung $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$ mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Matrix $\underline{Y}$ aus der Gleichung $\underline{Y} \cdot \underline{C} = \underline{D}$ mit

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 37

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x + 2y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 0 \\ -3x - 2y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

a) mit der Cramerschen Regel,

b) mit dem Gauß-Algorithmus,

c) durch Matrix-Inversion mit Hilfe der Adjunkten.

Vergleichen Sie den jeweiligen Aufwand!

Aufgabe 38

a) Gegeben sind die linearen Beziehungen (Transformationen)

$$\underline{x} = \underline{A} \cdot \underline{y}; \quad \underline{y} = \underline{B} \cdot \underline{z}.$$

Dabei seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ zwei reguläre (n,n)-Matrizen und $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ $n-$dimensionale Spaltenvektoren. Ermitteln Sie die Matrix $\underline{C}$ der linearen Transformation

$$\underline{z} = \underline{C} \cdot \underline{x}.$$

b) Führen Sie die Berechnung aus Teil a) durch für die Transformationen

$$\begin{array}{rcrcr} y_1 & = & z_1 & - & z_2 \\ y_2 & = & -z_1 & - & z_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & y_1 & + & y_2 \\ x_2 & = & y_1 & & \end{array}$$

Aufgabe 39

a) Es sei $\underline{A}$ =diag(a_{ii}) eine Diagonalmatrix der Ordnung 3 und $\underline{x}$ eine $(3,1)$-Matrix (ein Spaltenvektor) mit den Elementen x_1, x_2, x_3. Berechnen Sie den Ausdruck $\underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$.

b) Wie kann man den Ausdruck $a_{11}x_1y_1+a_{22}x_2y_2+a_{33}x_3y_3$ in Matrixschreibweise darstellen?

Aufgabe 40

Zur Matrix $\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ soll eine Matrix $\underline{A}$ gefunden werden, welche die Bedingung $\underline{A} \cdot \underline{S} = \underline{S} \cdot \underline{A}$ erfüllt.

a) Wieviele Zeilen und Spalten muss die Matrix $\underline{A}$ haben ?

b) Folgende Elemente der Matrix $\underline{A}$ seien gegeben:

$a_{11} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{33} = 3,\ a_{32} = -2,\ a_{23} = -4$

Berechnen Sie die übrigen Elemente von $\underline{A}$ und die Produktmatrix $\underline{P} = \underline{A} \cdot \underline{S}$.

c) Für welche Zahlen λ hat das lineare Gleichungssystem $\underline{P} \cdot \underline{y} = \lambda\, \underline{y}$ nichttriviale Lösungen ? ($\underline{y}$ ist ein Spaltenvektor mit den Elementen y_1, y_2, y_3.)

Aufgabe 41

Ein Lösungsvektor des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & ?y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \end{array} \qquad \text{ist} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den unleserlichen Koeffizienten.

b) Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.

Aufgabe 42

Untersuchen Sie den Rang der Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ k & -3 & 3 \end{pmatrix}$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter k. Was bedeutet das Ergebnis für die Lösbarkeit des Gleichungssystems $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$?

Aufgabe 43

Bestimmen Sie den Rang der beiden Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\underline{A}; \underline{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

und diskutieren Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystems $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$.

Aufgabe 44

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 45

Bestätigen Sie die Gültigkeit der Rechenregel $(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}$ für die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 46

Ermitteln Sie die inversen Matrizen durch elementare Zeilenumformungen:

a) $\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5 Anwendungen

Aufgabe 47

Gegeben ist die Matrix $\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Welche Eigenschaft hat die Abbildung $\underline{x}^* = \underline{M} \cdot \underline{x}$?

b) Ermitteln Sie das Bild des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(1/1)$; $B(4/1)$; $C(3/2)$ unter der Abbildung $\underline{x}^* = \underline{M} \cdot \underline{x}$.
Skizzieren Sie Dreieck ABC und Bilddreieck $A^*B^*C^*$

Aufgabe 48

Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie das zugehörige Eigenwertproblem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$ in folgenden Teilschritten:

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem ausführlich an.

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2.

c) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$.

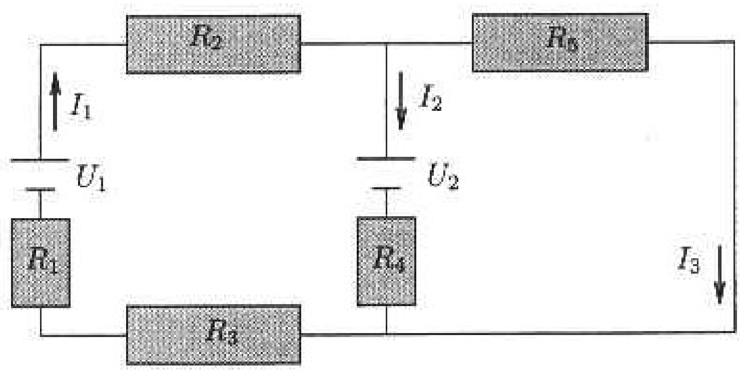
d) Zeigen Sie, dass diese Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 49

Die Matrix $\underline{B}$ besitze die beiden (einfachen) Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\underline{x}_1 = (1, -1)$ und $\underline{x}_2 = (1, 1)$. Wie lautet die Matrix $\underline{B}$?

Aufgabe 50

Im skizzierten Netzwerk sind die Widerstände $R_1, R_2, \ldots R_5$ und die Spannungen U_1, U_2 gegeben. Stellen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln ein Gleichungssystem für die unbekannten Ströme I_1, I_2, I_3 auf und ermitteln Sie diese Ströme.



6 Ergebnisse

1) $\underline{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{X} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{Y} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Lösungen

Dipl.-Math. M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

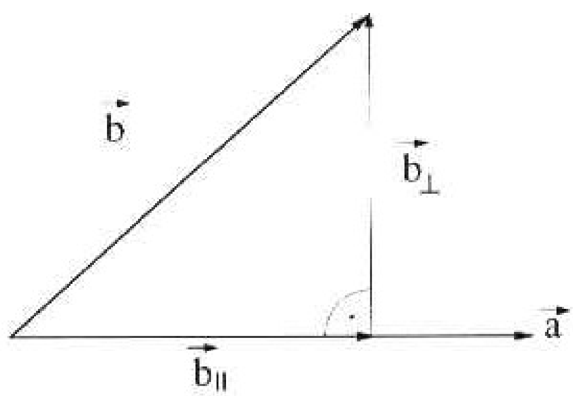
Aufgabe 1 – M. Baum (17 Minuten, max. 17 Punkte)

a) **(4P)** Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $|\vec{b}| = \sqrt{2}$.
Welche Winkel $0 \leq \varphi \leq \pi$ können die beiden Vektoren miteinander einschließen, damit der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ dieselbe Länge hat wie der Vektor $\vec{a}$?

b) **(4P)** Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Von einem Vektor $\vec{b}$ ist die Normalkomponente $\vec{b}_\perp := \vec{b} - \vec{b}_\parallel = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ bezüglich $\vec{a}$ bekannt.

(Zerlegung des Vektors $\vec{b}$ in die Parallelkomponente $\vec{b}_\parallel$ und Normalkomponente $\vec{b}_\perp$ bzgl. $\vec{a}$ (siehe Skizze)).
Für das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelte $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$.
Berechnen Sie die Vektoren $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.



c) **(4P)** Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Stellen Sie $\vec{a}$ als Linearkombination aus $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

d) **(5P)** Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$, wenn $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ und $\vec{b} = -4\vec{p} + 5\vec{q}$ senkrecht sind und $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ gilt.

Aufgabe 2 – M. Baum (13 Minuten, max. 13 Punkte)

Gegeben seien die drei linearen Transformationen $f_i : \mathbb{R}^{3x1} \to \mathbb{R}^{3x1}$ (i = 1, 2, 3).
f_1 sei eine Drehung von 45^0 um die x-Achse, f_2 sei eine Drehung von 90^0 um die y- Achse und f_3 eine Drehung von 120^0 um die z-Achse.

a) **(3P)** Ermitteln Sie die Drehmatritzen $[f_3]$, $[f_2]$ und $[f_1]$ der Abbildungen f_3, f_2 und f_1 (mit Angabe exakter Werte !).
b) **(3P)** Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[f_3 \circ f_2 \circ f_1]$ der Verkettung $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ (mit Angabe exakter Werte !).
c) **(7P)** Welche Eigenschaften hat die verkettete Funktion $f_3 \circ f_2 \circ f_1$?

A1 a) (4P)

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \overset{!}{=} |\vec{a}| \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\underset{|\vec{a}|\neq 0}{\Longrightarrow} \quad |\vec{b}|\sin\varphi = 1 \ \tfrac{1}{2} \quad \underset{|\vec{b}|=\sqrt{2}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{2}\sin\varphi = 1 \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\varphi = 45^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{4}} \ 1 \quad \text{oder} \quad \boxed{\varphi = 135^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{3}{4}\pi} \ 1$$

b) (4P)

$$\vec{b}_{\parallel} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} \ \tfrac{1}{2} = \frac{10}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 2\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} \ \tfrac{1}{2} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \begin{pmatrix}-3\\1\\1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\5{,}5\end{pmatrix} \ 1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{s} = \vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\7{,}5\end{pmatrix} \ 1 \qquad \vec{d} = \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-3{,}5\end{pmatrix} \ 1$$

c) (4P)

$$\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} \Rightarrow \lambda_1\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ (1) $2\lambda_1 + \lambda_2 = 4$ $\tfrac{1}{2}$

(2) $\lambda_2 = 2$ $\tfrac{1}{2}$ $\qquad$ (2) in (1): $\Longrightarrow$ (4) $\boxed{\lambda_1 = 1}$ $\tfrac{1}{2}$

(3) $-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3$ $\tfrac{1}{2}$

(4), (2) in (3): $3 = -1 + 4$ ✓ 1 $\Rightarrow 1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ 1

d) $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(5P)

$$\iff (2\vec{p} + \vec{q})(-4\vec{p} + 5\vec{q}) = 0$$

$$\iff -8|\vec{p}|^2 + 10\vec{p}\vec{q} - 4\vec{p}\vec{q} + 5|\vec{q}|^2 = 0 \quad (1)$$

$$\iff -8|\vec{p}|^2 + 6\vec{p}\vec{q} + 5|\vec{q}|^2 = 0 \quad (1)$$

$$\underset{|\vec{p}|=|\vec{q}|}{\iff} \quad -3|\vec{p}|^2 + 6\vec{p}\vec{q} = 0 \;\; \left(\tfrac{1}{2}\right) \iff \boxed{\vec{p}\vec{q} = \tfrac{1}{2}|\vec{p}|^2} \;\; \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos \measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \cos\alpha = \overset{\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}|^2} \;\; \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos \measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 60^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{3}} \;\; (1)$$

$\boxed{A2}$

a) (3P)

$$[f_3] = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ & 0 \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$[f_2] = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$[f_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ 0 & \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad 1$$

b) (3P) $[f_3 \circ f_2 \circ f_1] = [f_3] \cdot [f_2] \cdot [f_1]$

Falk'sches Schema:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & & & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\hline
-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \\
\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}$$

$1{,}5 \qquad\qquad 1{,}5$

c) (7P)

- Die verkettete Fkt. $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ ist eine LOT, da f_3, f_2, f_1 eine LOT.

$\frac{1}{2}$ Die Verkettung von LOT's ist wieder eine LOT

- Die verkettete Fkt. ist eine Drehung

Es gilt:

$$[f_3 \circ f_2 \circ f_1]^T [f_3 \circ f_2 \circ f_1] = [f_1]^T [f_2]^T [f_3]^T [f_3][f_2][f_1] = \underline{E} = \underline{1}_3$$

Außerdem gilt

$\frac{1}{2}$

$$\det([f_3 \circ f_2 \circ f_1]) = \underbrace{\det([f_3])}_{=1} \cdot \underbrace{\det([f_2])}_{=1} \cdot \underbrace{\det([f_1])}_{=1} = 1$$

D.h. $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ ist eine LOT $\wedge$ $\det([f_3 \circ f_2 \circ f_1]) = 1$

Fortsetzung Blatt -5-

<u>Drehachse:</u>

$[f_3 \circ f_2 \circ f_1] =: \underline{A} \implies \underline{A}\vec{x} = \vec{x} \iff (\underline{A} - \underline{E})\vec{x} = \vec{0}$ $\frac{1}{2}$

$$\implies \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} - 1\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \quad \text{Normalenv. } \vec{n}_2 \\ (E_3) \quad \text{Normalenv. } \vec{n}_3 \end{array}$$

$\vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = \vec{x} =: \vec{r}$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} - 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

Suche Vektor $\vec{s}$ mit $\vec{s} \perp \vec{r}$:

Wähle $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$

$$\implies f(\vec{s}) = \begin{pmatrix} 0 & \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \\ 0 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Drehwinkel:

$$\cos \sphericalangle(\vec{s}, f(\vec{s})) = \cos\alpha = \frac{\vec{s}\cdot f(\vec{s})}{|\vec{s}|\,|f(\vec{s})|}$$

$$\vec{s}\cdot f(\vec{s}) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \approx -0{,}74 \quad \frac{1}{2}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{2} \approx 1{,}41 \ \frac{1}{2}; \quad f(\vec{s}) \approx \sqrt{0{,}07 + 0{,}93 + 1} \approx 1{,}41 \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-0{,}74}{1{,}41 \cdot 1{,}41} \Rightarrow \boxed{\alpha = 111{,}85^\circ} \quad 1$$

Orientierung:

$$\vec{\alpha}_0 = \frac{\vec{s}\times f(\vec{s})}{|\vec{s}\times f(\vec{s})|} = \frac{1}{\sqrt{3{,}47}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{3{,}47}} \begin{pmatrix} -0{,}97 \\ 1{,}26 \\ 0{,}97 \end{pmatrix} \quad 1$$