BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Studienfach: Mathematik
Klausur

Datum: 24.03.2009

Ausbildungsbereich:	Technik	**Studienjahrgang:**	2009
Fachrichtung:	Maschinenbau	**Studienhalbjahr:**	1
Gruppe:		**Bearbeitungszeit:**	90 Minuten
Dozenten:	Bauer, Bauer, Baum, Pflieger, Rapp, Schäffler		
Hilfsmittel:	Alle, außer elektronische Rechner		
Bewertung:	Punkte:	Note:	Signum: ....

Student: ....

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen – 35 min.)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen von $\sqrt{\dfrac{1-j\sqrt{3}}{2}}$

und geben Sie jeweils den Real- und Imaginärteil der Lösungen an.

b) Welche Punktmenge in der Gauß'schen Zahlenebene wird durch die Bedingung

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \geq 2 \quad \text{definiert?}$$

Skizzieren Sie diese Punktmenge.

c) Gegeben ist das Polynom $p(z) = z^3 - 2z - 4$.
Bestimmen Sie die Nullstellen (reell und komplex) des Polynoms und geben Sie die Produktform (Linearfaktorzerlegung) von $p(z)$ an.

d) Für die harmonischen Funktionen $x_1(t) = 2\sin(\omega t)$, $x_2(t) = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$ und

$x_3(t) = B\sin(\omega t + \frac{4}{3}\pi)$ mit $A > 0$ und $B > 0$ soll gelten

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie **rechnerisch** und **zeichnerisch** A und B mit Hilfe komplexer Rechnung.

Aufgabe 2 (Vektorrechnung – 25 min.)

a) Man bestimme einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$|\vec{a}| = \sqrt{26} \quad \text{und} \quad \vec{a} \perp \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a} \perp \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b) Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ **Einheitsvektoren**. Ferner sei $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = 90°$ und $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = 45°$.

Man berechne $\sphericalangle(\vec{a} + \sqrt{3}\vec{c}, \vec{a} - 2\vec{b})$.

c) Bestimmen Sie das $\alpha \in \mathbb{R}$, für das die folgenden Vektoren linear abhängig sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Für dieses α stelle man $\vec{v}_j$ (j=1,2,3) jeweils als Linearkombination der anderen Vektoren $\vec{v}_k$ ($k \neq j$) dar.

Aufgabe 3 (LGS, Matrizen – 30 min.)

a) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

(i) Für welche Werte von a und b ist das LGS eindeutig lösbar?
(ii) Für welche Werte von a und b gibt es keine Lösung?
(iii) Für welche Werte von a und b besitzt das LGS unendlich viele Lösungen?
(iv) Geben Sie im Fall (i) diese Lösung an.
(v) Bestimmen Sie im Fall (iii) die Lösungsmenge.

b) Bestimmen Sie die Lösung $\underline{X}$ der Matrizengleichung

$$\underline{A}\underline{X} + \underline{X}\underline{A}^T = \underline{E}, \quad \text{wobei } \underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wünschen Ihnen einen kühlen Kopf und gutes Gelingen!

$\boxed{A1}$ a) $w := \dfrac{1-\sqrt{3}j}{2} \Rightarrow |w| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

$\arg w = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

1 $\Rightarrow z_k = 1 \cdot e^{j\frac{\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}{2}}, \ (k = 0,1)$

1 $\Rightarrow \boxed{z_0 = e^{-j\frac{\pi}{6}} = e^{j\frac{11}{6}\pi}}$ $\boxed{z_1 = e^{j\frac{5}{6}\pi}}$

$z_0 = \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + j\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}j} \Rightarrow \operatorname{Re}(z_0) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\operatorname{Im}(z_0) = -\frac{1}{2}$

2/4

$z_1 = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + j\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \boxed{-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}j} \Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\operatorname{Im}(z_1) = \frac{1}{2}$

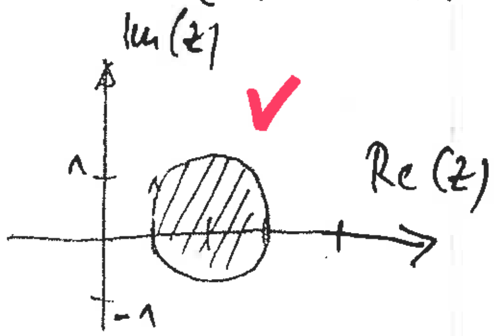
1b) $z = x+jy \Rightarrow \dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{x+1+jy}{x-1+jy} = \dfrac{(x+1+jy)(x-1-jy)}{(x-1+jy)(x-1-jy)} =$

2 $= \dfrac{x^2-1+y^2-2jy}{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = \dfrac{x^2-1+y^2}{(x-1)^2+y^2} \geq 2$

2 $\Leftrightarrow x^2-1+y^2 \geq 2\left((x-1)^2+y^2\right) \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow K = \{z \mid z = x+jy \wedge \underbrace{(x-2)^2+y^2 \leq 1}_{\text{Kreis um } M(2|0);\ \text{Radius } 1}\}$

3/7



K ist die Menge alle z in oder auf diesem Kreis.

1c) $p(z) = z^3 - 2z - 4$

1 $\quad z_1 = 2$ ist NS, da $p(2) = 0$ ✓

Hornerschema:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & * & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

2 $\Rightarrow z^2 + 2z + 2 = 0$

$\Rightarrow z_{2/3} = \dfrac{-2 \pm \overbrace{\sqrt{4-8}}^{2j}}{2} = -1 \pm j$ ✓✓

2 $\Rightarrow (z^3 - 2z - 4) = \boxed{(z-2)(z+1-j)(z+1+j)} =$ ✓

$= (z-2)((z+1)^2+1) = \boxed{(z-2)(z^2+2z+2)}$ ✓

$\overline{5}$

A 1 d)

$$2\sin(\omega t) + A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + B\sin\left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin(\omega t) + A\sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + B\sin\left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) = 0$$

$$1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{2}_{=:z_{10}} + \underbrace{A e^{j\,2/3\,\pi}}_{=:z_{20}} + \underbrace{B e^{j\frac{4}{3}\pi}}_{=:z_{30}} = 0 \quad ✓$$

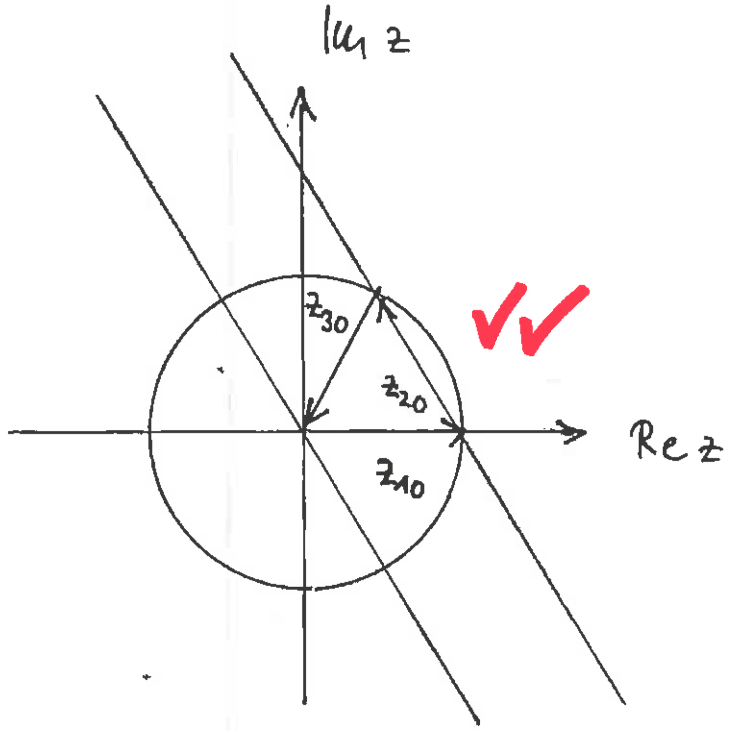
$$1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + A\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{3}\right) + B\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{3}\right) = 0 \quad ✓$$

$$1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}A - B\frac{\sqrt{3}}{2}\right)j = 0 \Leftrightarrow \left(2 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) = 0 \wedge \left(\frac{\sqrt{3}}{2}A - B\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad ✓$$

$$\Leftrightarrow \quad A + B = 4 \quad \wedge \quad A - B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A = 2} \quad \wedge \quad \boxed{B = 2}$$

2 ✓ ✓

2



✓✓

$\overline{7}$

zeichnerisch $\quad A = $ Länge von $z_{20} \approx 2$

$\qquad\qquad\quad B = $ Länge von $z_{30} \approx 2$

$\boxed{A2}$ a.)

1 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \perp \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 5a_1 + a_2 + 7a_3 = 0$

$\vec{a} \perp \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 6a_1 - 9a_2 + 5a_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 7 & 0 \\ 6 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} |\cdot 6 \\ |\cdot(-5) \\ \end{array} \qquad \boxed{a_3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{\lambda}{3}}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -51 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ |:(-17) \\ \end{array} \qquad \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{4}{3}\lambda}$$

3

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{16}{9}\lambda^2 + \lambda^2} \overset{!}{=} \sqrt{26} \Rightarrow \frac{26}{9}\lambda^2 = 26$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3 \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \pm \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

$\frac{2}{6}$

2c) $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ l.a. $\Leftrightarrow \boxed{\alpha = 4}$

1

Denn: $\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \end{array} \begin{array}{l} |(-1) \\ \\ \end{array} \qquad \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & 0 \end{array}$

1

$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha-2 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ |(-2) \\ \end{array}$ $\quad$ Wähle $\lambda_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \lambda_2 = -2t,\ \lambda_1 = -2t$

Für $t = 1$: $\boxed{-2\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}}$

$\frac{3}{5}$ Damit: $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$; $\vec{v}_2 = \frac{1}{2}(-2\vec{v}_1 + \vec{v}_3)$ und $\vec{v}_1 = \frac{1}{2}(-2\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$

2b) $\alpha := \sphericalangle(\vec{a}+\sqrt{3}\,\vec{c}, \vec{a}-2\vec{b})$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{(\vec{a}+\sqrt{3}\,\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})}{|\vec{a}+\sqrt{3}\,\vec{c}|\,|\vec{a}-2\vec{b}|}$$

1 $$= \frac{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\sqrt{3}\,\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{c} + 3|\vec{c}|^2}\sqrt{|\vec{a}|^2 - \cancel{2}\,4\,\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2}}$$ ✓

1 $$= \frac{1 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\sqrt{3}\,\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{c}}\cdot\sqrt{5 - 4\,\vec{a}\cdot\vec{b}}}$$ ✓

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \doteq \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ ✓

2 $\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos\sphericalangle(\vec{b},\vec{c}) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ✓

$\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}|\,|\vec{c}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \cos(90^\circ) = 0$

1 $$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1 - 2\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot 0 - 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{4 + \underbrace{2\sqrt{3}\cdot 0}_{=0}}\;\sqrt{5 - 4\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$ ✓

1 $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \frac{3}{4}\pi \mathrel{\hat{=}} 135^\circ}$ ✓

6

-6-

$\boxed{A3}$

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & b \end{array}\right) \quad | \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & a & b \end{array}\right) \quad | \cdot 2$$

2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & a-4 & b-10 \end{array}\right)$$

(i) eine Lsg. $\Leftrightarrow$ $a \neq 4 \wedge b \in \mathbb{R}$

3 (ii) keine Lsg. $\Leftrightarrow$ $a = 4 \wedge b \neq 10$

(iii) ∞-viele Lsgen. $\Leftrightarrow$ $a = 4 \wedge b = 10$

(iv) $\boxed{x_3 = \frac{b-10}{a-4}} \Rightarrow -x_2 - 2 \cdot \frac{b-10}{a-4} = -5 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{5a-2b}{a-4}}$

3 $\Rightarrow x_1 + 2\,\frac{5a-2b}{a-4} + 3\,\frac{b-10}{a-4} = 6 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{-4a+b-6}{a-4}}$

$\frac{1}{9}$ $\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{a-4}\begin{pmatrix} -4a+b+6 \\ 5a-2b \\ b-10 \end{pmatrix}$

(v) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\boxed{x_3 = \lambda}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

4 $\Rightarrow \boxed{x_2 = 5 - 2\lambda}$

$\Rightarrow x_1 + 2(5-2\lambda) + 3\lambda = 6 \Rightarrow \boxed{x_1 = -4 + \lambda}$

$\frac{1}{5}$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

3b) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}$

1 $XA^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b-a \\ 2c & d-c \end{pmatrix}$ ✓

$\Rightarrow \quad AX + XA^T = \begin{pmatrix} 4a & 3b-a \\ 3c-a & 2d-b-c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (1) $4a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{4}$ ✓

(2) $-a+3b=0 \Longrightarrow b = \frac{1}{12}$ ✓

4 (3) $3c-a=0 \Longrightarrow c = \frac{1}{12}$ ✓

(4) $2d-b-c=1 \Longrightarrow d = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right) = \frac{7}{12}$ ✓

1 $\Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}$ ✓

$\overline{}$
3