Arbeitsblatt Fehlerrechnung
Absoluter und relativer (prozentualer) Maximalfehler

1. Um das Volumen V eines Kegelstumpfes zu berechnen, werden die beiden Radien r mit $(30.0 \pm 0.2)m$ bzw. R mit $(60.0 \pm 0.2)m$ und die Höhe H mit $(50.0 \pm 0.2)m$ gemessen. Gesucht sind der absolute, relative und prozentuale Maximalfehler, die bei dieser Berechnung abgeschätzt werden können.

Gegeben : $H = (50.0 \pm 0.2)m$, $r = (30.0 \pm 0.2)m$, $R = (60.0 \pm 0.2)m$.

Gesucht : $V_0 = V(H_0, r_0, R_0)$, absoluter Maximalfehler $\triangle V_{\max}$, relativer Maximalfehler $\frac{\triangle V_{\max}}{|V_0|}$

Lösungsweg : Eine Skizze ist nützlich!

NR: $V = V(H, r, R) =$

$$V_0 = V(H_0, r_0, R_0) = \tfrac{\pi H_0}{3}(r_0^2 + r_0 R_0 + R_0^2) \approx \underline{\underline{\mathbf{329867.23} m^3}}.$$

$$V_r = \tfrac{\pi H}{3}(2r + R), \quad V_R = \tfrac{\pi H}{3}(r + 2R), \qquad V_H = \tfrac{\pi}{3}(r^2 + rR + R^2).$$

$|\triangle V| \approx |dV(H_0, r_0, R_0)| =$

(Der Rundungsfehlereinfluss von π bleibt unberücksichtigt.)

$= |V_H(H_0, r_0, R_0) \triangle H + V_r(H_0, r_0, R_0) \triangle r + V_R(H_0, r_0, R_0) \triangle R| \leq$

(Dreiecksungleichung)

$\leq \triangle V_{\max} \overset{def}{=} |V_H(H_0, r_0, R_0) \triangle H| + |V_r(H_0, r_0, R_0) \triangle r| + |V_R(H_0, r_0, R_0) \triangle R| =$

$\Big($**absoluter Maximalfehler**$\Big)$

$$= \tfrac{\pi}{3}(r_0^2 + r_0 R_0 + R_0^2)|\triangle H| + \tfrac{\pi H_0}{3}(2r_0 + R_0)|\triangle r| + \tfrac{\pi H_0}{3}(r_0 + 2R_0)|\triangle R| =$$

$$= \tfrac{\pi H_0}{3}\Big(\underbrace{(r_0^2 + r_0 R_0 + R_0^2)\tfrac{|\triangle H|}{H_0}}_{=25.2m^2} + \underbrace{(2r_0 + R_0)|\triangle r|}_{=24m^2} + \underbrace{(r_0 + 2R_0)|\triangle R|}_{=30m^2}\Big) =$$

$$\approx \underline{\underline{\mathbf{1320\pi m^3 \approx 4146.902 m^3}}}$$

$$\left|\frac{\triangle V}{V_0}\right| \approx \left|\frac{dV(H_0,r_0,R_0)}{V_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{V_H(H_0,r_0,R_0)\triangle H+V_r(H_0,r_0,R_0)\triangle r+V_R(H_0,r_0,R_0)\triangle R}{V_0}\right| \leq$$

$$\leq \frac{\triangle V_{\max}}{|V_0|} \overset{def}{=} \frac{\frac{\pi H_0}{3}((r_0^2+r_0R_0+R_0^2)\frac{|\triangle H|}{H_0}+(2r_0+R_0)|\triangle r|+(r_0+2R_0)|\triangle R|)}{\frac{\pi H_0}{3}(r_0^2+r_0R_0+R_0^2)} =$$

(**relativer und prozentualer Maximalfehler**)

$$= \frac{(r_0^2+r_0R_0+R_0^2)\frac{|\triangle H|}{H_0}+(2r_0+R_0)|\triangle r|+(r_0+2R_0)|\triangle R|}{(r_0^2+r_0R_0+R_0^2)} \approx$$

$$\approx \underline{\underline{\mathbf{0.0126 \cong 1.26\%}}}$$

2. Von Punkt A nach B soll geradlinig eine Straße errichtet werden, die Länge der Strecke $s = \overline{AB}$ kann man wegen des bergigen Geländes jedoch nicht ausmessen. Bekannt sind als Hilfsgrößen die zwei Entfernungen $a = \overline{CA} = (364.76 \pm 0.05)m$ und $b = \overline{CB} = (402.35 \pm 0.05)m$ vom Meßpunkt C und der Winkel γ zwischen den Beobachtungs- linien a, b mit $68^0 14' \pm 1'$. Gesucht seien der absolute und relative Maximalfehler bei der Berechnung der Strecke s. Welche der Hilfsgrößen beeinflusst die Fehler am stärksten?

Gegeben :	$a = (364.76 \pm 0.05)m,$	*Gesucht* :	$s_0 = s(a_0, b_0, \gamma_0)$
	$b = (402.35 \pm 0.05)m,$		absoluter Maximalfehler $\triangle s_{\max}$
	$\gamma = 68^0 14' \pm 1'$		relativer Maximalfehler $\frac{\triangle s_{\max}}{\lvert s_0\rvert}$

Lösungsweg : Eine Skizze ist nützlich!

NR: $s = s(a,b,\gamma) = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}\,,$

$s_0 = s(a_0,b_0,\gamma_0) = \sqrt{a_0^2+b_0^2-2a_0b_0\cos\gamma_0} \approx \underline{\underline{\mathbf{431.38}m.}}$

$$s_a = \frac{a-b\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}, s_b = \frac{b-a\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}},$$

$$s_\gamma = \frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}.$$

Hinweis : Der Winkel ist in Bogenmaß umzurechnen.

$$
\begin{aligned}
|\triangle s| &\approx |ds(a_0,b_0,\gamma_0)| = \\
&= |s_a(a_0,b_0,\gamma_0)\triangle a + s_b(a_0,b_0,\gamma_0)\triangle b + s_\gamma(a_0,b_0,\gamma_0)\triangle\gamma| \leq \\
&\textbf{(Dreiecksungleichung)} \\
&\leq \triangle s_{\max} \overset{def}{=} |s_a(a_0,b_0,\gamma_0)\triangle a| + |s_b(a_0,b_0,\gamma_0)\triangle b| + |s_\gamma(a_0,b_0,\gamma_0)\triangle\gamma| = \\
&\big(\textbf{absoluter Maximalfehler}\big) \\
&= \left|\frac{a_0-b_0\cos\gamma_0}{\sqrt{a_0^2+b_0^2-2a_0b_0\cos\gamma_0}}\right||\triangle a| + \left|\frac{b_0-a_0\cos\gamma_0}{\sqrt{a_0^2+b_0^2-2a_0b_0\cos\gamma_0}}\right||\triangle b| + \left|\frac{a_0b_0\sin\gamma_0}{\sqrt{a_0^2+b_0^2-2a_0b_0\cos\gamma_0}}\right||\triangle\gamma| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{a_0^2+b_0^2-2a_0b_0\cos\gamma_0}}\Big(\underbrace{|a_0-b_0\cos\gamma_0||\triangle a|}_{\approx 10.78m^2} + \underbrace{|b_0-a_0\cos\gamma_0||\triangle b|}_{\approx 13.35m^2} + \\
&+\underbrace{|a_0b_0\sin\gamma_0||\triangle\gamma|}_{\approx 40.89m^2}\Big) \approx \underline{\underline{\mathbf{0.15}m}}
\end{aligned}
$$

Offenbar wirkt sich die Messung des Winkels γ_0 auf die Genauigkeit am stärksten aus, da der Anteil dieser Messeung an der Abschätzung (im Klammerausdruck $40.89m^2$) am größten ist.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\triangle s}{s_0}\right| &\approx \left|\frac{ds(a_0,b_0,\gamma_0)}{s_0}\right| = \left|\frac{s_a(a_0,b_0,\gamma_0)\triangle a+\rho_h(a_0,b_0,\gamma_0)\triangle b+\rho_m(a_0,b_0,\gamma_0)\triangle\gamma}{s_0}\right| \leq \\
&\leq \frac{\triangle s_{\max}}{|s_0|} \overset{def}{=} \frac{1}{s_0^2}(|a_0-b_0\cos\gamma_0||\triangle a| + |b_0-a_0\cos\gamma_0||\triangle b| + |a_0b_0\sin\gamma_0||\triangle\gamma|) \approx \\
&\big(\textbf{relativer und prozentualer Maximalfehler}\big) \\
&\approx \underline{\underline{\mathbf{0.00035 \cong 0.035\%}}}
\end{aligned}
$$

3. Von einem Zylinder sind der Durchmesser d mit $(4.84 \pm 0.01)cm$, die Höhe h mit $(6.74 \pm 0.01)cm$ und die Masse m mit $(968.5 \pm 0.1)g$ gemessen worden. Gesucht seien der absolute, relative und prozentuale Maximalfehler bei der Berechnung der Dichte $\rho = \rho(d,h,m)$.

Gegeben :	$d = (4.84 \pm 0.01)cm,$	*Gesucht* :	$\rho_0 = \rho(d_0,h_0,m_0)$
	$h = (6.74 \pm 0.01)cm$		absoluter Maximalfehler $\triangle\rho_{\max}$
	$m = (968.5 \pm 0.1)g$		relativer Maximalfehler $\frac{\triangle\rho_{\max}}{\lvert\rho_0\rvert}$

Lösungsweg :

NR: $\rho = \rho(d,h,m) = \frac{4m}{\pi d^2 h}$,

$$\rho_0 = \rho(d_0,h_0,m_0) = \frac{4m_0}{\pi d_0^2 h_0} \approx \underline{\underline{\mathbf{7.81}\frac{g}{cm^3}}}.$$

$$\rho_d = \frac{4m}{\pi h}(-2d^{-3}),\quad \rho_m = \frac{4}{\pi d^2 h},\quad \rho_h = \frac{4m}{\pi d^2}(-h^{-2}).$$

$|\triangle\rho| \approx |d\rho(d_0,h_0,m_0)| =$

(Der Rundungsfehlereinfluss von π bleibt unberücksichtigt.)

$= |\rho_d(d_0,h_0,m_0)\triangle d + \rho_h(d_0,h_0,m_0)\triangle h + \rho_m(d_0,h_0,m_0)\triangle m| \leq$

(**Dreiecksungleichung**)

$\leq \triangle\rho_{\max} \overset{def}{=} |\rho_d(d_0,h_0,m_0)\triangle d| + |\rho_h(d_0,h_0,m_0)\triangle h| + |\rho_m(d_0,h_0,m_0)\triangle m| =$

(**absoluter Maximalfehler**)

$$= \frac{8m_0}{\pi d_0^3 h_0}|\triangle d| + \frac{4m_0}{\pi d_0^2 h_0^2}|\triangle h| + \frac{4}{\pi d_0^2 h_0}|\triangle m| =$$

$$= \frac{4m_0}{\pi d_0^2 h_0}\left(\frac{2|\triangle d|}{d_0} + \frac{|\triangle h|}{h_0} + \frac{|\triangle m|}{m_0}\right) =$$

$$= \rho_0 \underbrace{\left(\underbrace{\frac{2|\triangle d|}{d_0}}_{\approx 0.0041} + \underbrace{\frac{|\triangle h|}{h_0}}_{\approx 0.0015} + \underbrace{\frac{|\triangle m|}{m_0}}_{\approx 0.0001}\right)}_{\approx 0.0057} \approx \underline{\underline{\mathbf{0.045}\frac{g}{cm^3}}}$$

$$\left|\frac{\triangle\rho}{\rho_0}\right| \approx \left|\frac{d\rho(d_0,h_0,m_0)}{\rho_0}\right| = \left|\frac{\rho_d(d_0,h_0,m_0)\triangle d+\rho_h(d_0,h_0,m_0)\triangle h+\rho_m(d_0,h_0,m_0)\triangle m}{\rho_0}\right| =$$

$$\leq \frac{\triangle\rho_{\max}}{|\rho_0|} \overset{def}{=} \frac{\rho_0\left(\frac{2|\triangle d|}{d_0}+\frac{|\triangle h|}{h_0}+\frac{|\triangle m|}{m_0}\right)}{\rho_0} =$$

(**relativer und prozentualer Maximalfehler**)

$$= \frac{2|\triangle d|}{d_0} + \frac{|\triangle h|}{h_0} + \frac{|\triangle m|}{m_0} \approx \underline{\underline{\mathbf{0.0057 \cong 0.57\%}}}$$

Bei vielen in der **Praxis** genutzten einfachen Funktionen kann man die **Abschätzung des relativen (und prozentualen) Maximalfehlers** direkt, d.h. ohne vorherige Kenntnis des Absolutfehlers leicht ermitteln, falls zumindest die relativen (prozentualen) Genauigkeiten der einzelnen Messgrößen bekannt sind. Dies gelingt immer dann besonders gut, wenn die Messgrößen nur in Funktionsausdrücken mit Produkten und Quotienten enthalten sind (auch im Sinne von Potenzen). Beispiele für derartige Funktionen sind:

$$\rho_{Zylinder} = \rho(d,h,m) = \frac{4m}{\pi d^2 h}, \qquad V_{Kegel} = V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

$$V_{Ellipsoid} = V(a,b,c) = \frac{4}{3}\pi abc, \qquad V_{Torus} = V(r,R) = 2\pi^2 r^2 R.$$

Mit ein wenig Übung wird der interessierte Studierende schnell die Lösungsmethode selbständig anwenden können. Dazu soll an den zwei folgenden Beispielen die Vorgehensweise erläutert werden.

4. Gesucht sei eine Abschätzung des prozentualen Fehlers einer Volumenberechnung eines Kreiszylinders, wenn der Radius r mit $\frac{1}{3}\%$ und die Höhe h mit $\frac{1}{2}\%$ fehlerbehaftet gemessen werden.

Gegeben : $\left|\frac{\triangle r}{r_0}\right| = \frac{1}{3}\%, \left|\frac{\triangle h}{h_0}\right| = \frac{1}{2}\%.$ *Gesucht* : relativer Maximalfehler $\frac{\triangle V_{\max}}{|V_0|}$

Lösungsweg :

$$\boxed{\begin{aligned} &\textbf{NR:}\quad V = V(r,h) = \pi r^2 h, V_r = 2\pi rh,\ V_h = \pi r^2, \\ &dV = V_r dr + V_h dh = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh = \pi r^2 h\left(2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}\right) \\ &\frac{dV}{V} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h} \end{aligned}}$$

$$\frac{\triangle V_{\max}}{|V_0|} = \left|\frac{dV}{V_0}\right| = \left|2\frac{dr}{r_0} + \frac{dh}{h_0}\right| \leq= 2\left|\frac{dr}{r_0}\right| + \left|\frac{dh}{h_0}\right| = \frac{2}{3}\% + \frac{1}{2}\% = \underline{\underline{\frac{7}{6}\%}}$$

(**Die Dreiecksungleichung liefert den relativen Maximalfehler**)

5. Es soll die Erdbeschleunigung g mit Hilfe eines mathematischen Pendels bestimmt werden, von dem die Länge l und die Periodenlänge T einer Schwingung gemessen werden können. Man weiß, daß beide Messgrößen die gleiche prozentuale Genauigkeit x% besitzen. Schätzen Sie den relativen Maximalfehler der Fallbeschleunigung ab.

Gegeben : $\left|\frac{dl}{r_{l0}}\right| = \left|\frac{dT}{T_0}\right| = x\%$, *Gesucht* : relativer Maximalfehler $\frac{\triangle g_{\max}}{|g_0|}$

Lösungsweg :

$$\boxed{\begin{aligned} &\textbf{NR}: \quad g = g(l,T) = \frac{4\pi^2 l}{T^2}, g_l = \frac{4\pi^2}{T^2}, \; g_T = \frac{-8\pi^2 l}{T^3}, \\ &dg = g_l dl + g_T dT = \frac{4\pi^2}{T^2} dl - \frac{8\pi^2 l}{T^3} dT = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\left(\frac{dl}{l} - 2\frac{dT}{T}\right) \\ &\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2\frac{dT}{T} \end{aligned}}$$

$$\frac{\triangle g_{\max}}{|g_0|} = \left|\frac{dg}{g_0}\right| = \left|\frac{dl}{l_0} - 2\frac{dT}{T_0}\right| \leq \left|\frac{dl}{l_0}\right| + 2\left|\frac{dT}{T_0}\right| = \underline{\underline{3x\%}}$$

Wie man erkennen kann, gehen bei den hier untersuchten Funktionen die relativen (und prozentualen) Fehler der Einzelmessungen logarithmisch in die Abschätzung des relativen (und prozentualen) Maximalfehlers ein. Konstante Größen fallen bei der Betrachtung heraus.