9.7. Aufgaben

1. Gegeben ist eine Familie von Funktionen durch die Gleichung

$$f_t(x) = -\frac{1}{2t}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}t \;; \qquad t>0$$

a) Untersuchen Sie $f_t(x)$ auf Symmetrie. Ermitteln Sie Nullstellen (mit Steigung), Extremwerte und Wendepunkte (mit Steigung).

b) Zeichnen Sie das Schaubild von $y = f_1(x)$.

c) Auf welcher Kurve liegen die Wendepunkte aller $f_t(x)$? (Anleitung: Eliminieren Sie in den Gln. $x_W(t)$ und $y_W(t)$ für die Wendepunktskoordinaten den Parameter t!)

d) Weisen Sie nach, daß $y = f_{t_1}(x)$ und $y = f_{t_2}(x)$ für $t_1 \neq t_2$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

e) Für welchen Wert von t hat die von der Bildkurve $f_t(x)$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $A = \frac{16}{3}\sqrt{3t}$?

1a) $f_t(x) = -\frac{1}{2t}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}t = f_t(-x) \Longrightarrow$

Symmetrie zur y-Achse

Nullstellen: $x^4 - 2tx^2 - 3t^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2}^2 = t \pm \sqrt{t^2+3t^2}$

$x_{1/2}^2 = t \pm 2t = 3t \Rightarrow \boxed{x_{1/2} = \pm\sqrt{3t}}$ $x^2 = (-t) < 0$ entfällt wegen $t>0$

Extremwerte: $y' = \frac{-4x^3}{2t} + 2x = 2x\left(1 - \frac{x^2}{t}\right) = 0 \Rightarrow$

$\boxed{x=0}$ mit $y'(0+\varepsilon^2) > 0$ und $y'(0-\varepsilon^2) < 0 \Rightarrow \boxed{P_{MIN}\left(0 \middle| \frac{3t}{2}\right)}$

$\boxed{x = \pm\sqrt{t}}$ mit $y'(\sqrt{t}+\varepsilon^2) < 0$ und $y'(\sqrt{t}-\varepsilon^2) > 0 \Rightarrow \boxed{P_{MAX}\left(\pm\sqrt{t} \middle| 2t\right)}$

$y'' = 2 - \frac{6x^2}{t} = 2\left(1 - \frac{3x^2}{t}\right) \Rightarrow y''(0) = 2 \Rightarrow x_{MIN} = 0$

$y''(\pm\sqrt{t}) = -4 \Rightarrow x_{MAX} = \pm\sqrt{t}$

-1- 9.7. Aufgabe 1 H. Schäffler

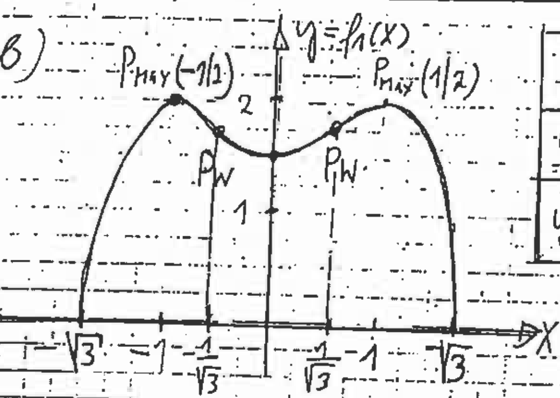
Wendepunkte: $y'' = 2\left(1 - \frac{3x^2}{t}\right) = 0 \Rightarrow x_W = \pm\sqrt{\frac{t}{3}}$

$y''\left(x > \sqrt{\frac{t}{3}}\right) < 0$ (Rechtskurve)

$y''\left(x < \sqrt{\frac{t}{3}}\right) > 0$ (Linkskurve) $\Rightarrow \boxed{P_W\left(\pm\sqrt{\frac{t}{3}} \middle| \frac{16t}{9}\right)}$

$y'\left(\pm\sqrt{t/3}\right) = \pm\frac{4}{3}\sqrt{t/3} \Rightarrow y'\left(\pm\sqrt{1/3}\right) = 0{,}7698 \approx 0{,}77$

1b)



x	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	1	$\sqrt{3}$
y	1,5	1,78	2	0
y'	0	0,77	0	$-6{,}93 = -4\sqrt{3t}$
	P_{MIN}	P_W	P_{MAX}	Nullstelle

1c) $x_W = \pm\sqrt{\frac{t}{3}} \Rightarrow t = 3x_W^2$ in $y_W = \frac{16t}{9}$ einsetzen $\Rightarrow$

$y_W = \frac{16}{9} \cdot 3x_W^2 = \boxed{\frac{16}{3}x_W^2 = y_W}$

1d) $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x) \Rightarrow -\frac{1}{2t_1}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}t_1 = -\frac{1}{2t_2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}t_2$

$x^4\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) = 3(t_1 - t_2) \Rightarrow \frac{(t_2 - t_1)}{t_1 \cdot t_2}x^4 = -3(t_2 - t_1) \Rightarrow$

$x^4 = (-3t_1 \cdot t_2) < 0$ wegen $t_1 > 0$ und $t_2 > 0$ Widerspruch, daher kein Schnittpunkt von $f_{t_1}(x)$ und $f_{t_2}(x)$

Aufgaben 9.7 Nr. 1e: Für welchen Wert t hat die von der Bildkurve $f_t(x)$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $A = \frac{16}{3}\sqrt{3}$?

$$\frac{A}{2} = \int_{x=0}^{\sqrt{3t}} \left\{-\frac{x^4}{2t} + x^2 + \frac{3}{2}t\right\} dt = \left\{-\frac{1}{2t}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}t\cdot x\right\}\Big|_0^{\sqrt{3t}}$$

$$\frac{A}{2} = \left(-\frac{1}{2t}\cdot\frac{9t^2}{5} + \frac{3t}{3} + \frac{3}{2}t\right)\sqrt{3t} = \frac{(-9+10+15)t\sqrt{3t}}{10}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{16}{10}\cdot t\sqrt{3t} \Rightarrow A = \frac{16}{5}t\sqrt{t}\cdot\cancel{\sqrt{3}} = \frac{16}{3}\cancel{\sqrt{3}} \Rightarrow t^{3/2} = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{t = \left(\frac{5}{3}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = 1{,}406}$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $y = x^3 - 4x^2 + 6x$

a) Bestimmen Sie Nullstellen, Hochpunkte, Tiefpunkte und Wendepunkte der Funktionskurve. Skizzieren Sie die Kurve.

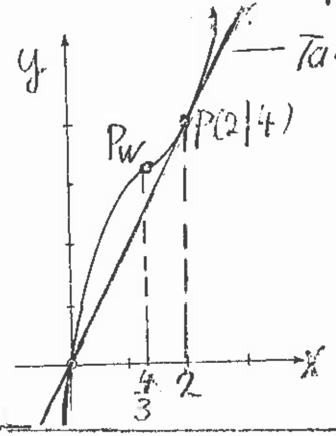
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Kurvenpunkt P(u/v) mit u > 0. Bestimmen Sie u so, daß die Tangente durch den Koordinatenursprung geht.

c) Berechnen Sie die Fläche zwischen dieser Tangente und der Kurve.

2a) Nullstellen: $x(x^2-4x+6)=0 \Rightarrow$ Nur $x=0$

$y' = 3x^2-8x+6=0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-72}}{6} \Rightarrow$

keine Hochpunkte oder Tiefpunkte



$\left.\begin{array}{l} y''(x) = 6x-8=0 \\ y'''(x) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_W = 4/3 \\ y_W = \frac{88}{27} = 3{,}26 \end{array}$

Wendepunkt $P_W\left(\frac{4}{3}\middle|3{,}26\right)$

2b) $\frac{y_T - v(u)}{x-u} = \frac{y_T-(u^3-4u^2+6u)}{x-u} = f'(u) = 3u^2-8u+6$

$P(x=0, y_T=0) \Rightarrow -u^3+4u^2-6u = -3u^3+8u^2-6u$

$2u^3-4u^2 = 2u^2(u-2)=0 \Rightarrow (u_{1/2}=0);\ \boxed{u_3 = 2} \Rightarrow$

$y_T = (x-2)(12-16+6)+(2^3-16+12) \Rightarrow \boxed{y_T = 2x}$

2c) $A = \int_0^2 (x^3-4x^2+6x)\,dx - \frac{2 \cdot 4}{2} = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 3x^2\right)\Big|_0^2 - 4$

$\boxed{A = \frac{36-32}{3} = \frac{4}{3}}$

3) Für welche Werte von a hat die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - a$ eine, zwei oder drei Nullstellen? Hinweis: Betrachten Sie zunächst $g(x) = x^3 + 3x^2$.

H. Schäffler

$g(x) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$

Nullstellen: $x^2=0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ = doppelte Nullstelle (Kurve berührt x-Achse)

$x_3 = -3$

$\boxed{N_{1/2}(0/0);\ N_3(-3/0)}$

Extremwerte: $g'(x) = 3x^2+6x = 3x(x+2)=0$

$x=0$ und $x=-2$

$y''(x) = 6x+6 \Rightarrow g''(0) = 6 \Rightarrow$ Minimum

$g''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow$ Maximum

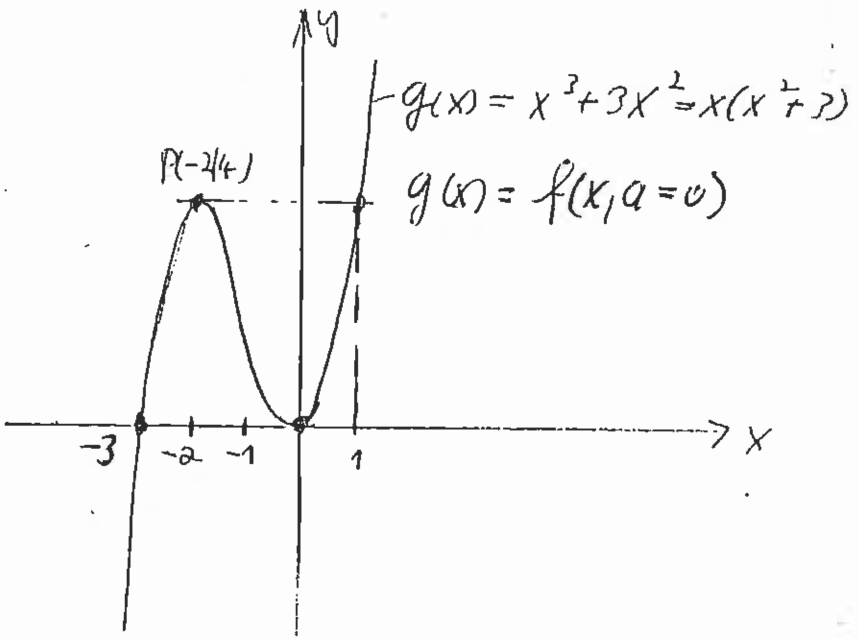
$P_{min}(0/0)$
$P_{max}(-2/4)$

Asymptote $g(x) = x^3\left(1+\frac{3}{x}\right) \Rightarrow$

$g(x) \to x^3$ für $x \to \pm\infty$

$\boxed{y_{as} = x^3}$

1. Fortsetzung Aufgabe 3 Seite 86 Bd 4



$y = f(x) = x^3+3x^2-a \Rightarrow$

$\boxed{y-(-a) = x^3+3x^2} \Longrightarrow$

$a<0 \Rightarrow$ $f(x)$ entsteht aus $g(x)$, indem $g(x)$ nach oben (d.h. in + y Richtung) verschoben wird, dann existiert nur 1 Nullstelle ($x=-3$)

2. Fortsetzung Aufgabe 3 Seite 86 Bd 4

$a>0 \Rightarrow$ $f(x)$ entsteht aus $g(x)$ durch Verschieben von $g(x)$ nach unten, d.h. in negative y Richtung.

für $0<a<4 \Rightarrow$ 3 Nullstellen

für $a=4 \Rightarrow$ 2 Nullstellen

für $a>4 \Rightarrow$ 1 Nullstelle

Zusammenfassen der Fälle $a<0$, $a=0$, und $a>0$ ergibt:

1 Nullstelle für $a<0$ und $a>4$

2 Nullstellen für $a=0$ ($x_1=0, x_2=-3$)
für $a=4$ ($x_1=-2, x_2=1$)

3 Nullstellen für $0<a<4$

4. Diskutieren und skizzieren Sie die gebrochenrationalen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ b) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 9}{x^2 - 9}$

4a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) > 0 \text{ für } (x^2-4) > 0 \Rightarrow |x| > 2 \\ f(x) < 0 \text{ für } (x^2-4) < 0 \Rightarrow |x| < 2 \end{matrix}$

1) $f(x) = f(-x)$, d.h. Symmetrie zur y-Achse

2) $x_1 = x_2 = 0$ = doppelte Nullstelle

3) Pole: $x = \pm 2$

für $x \to 2+0 \Rightarrow f(x) \to +\infty$

" $x \to 2-0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$

4) Asymptote: $x^2 : (x^2-4) = 1 + \frac{4}{x^2-4}$

$\frac{x^2-4}{4}$

$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} = 1 + \frac{4}{(x^2-4)} \Rightarrow$

$y = f(x) \to 1$ für $x \to \pm\infty$, d.h.

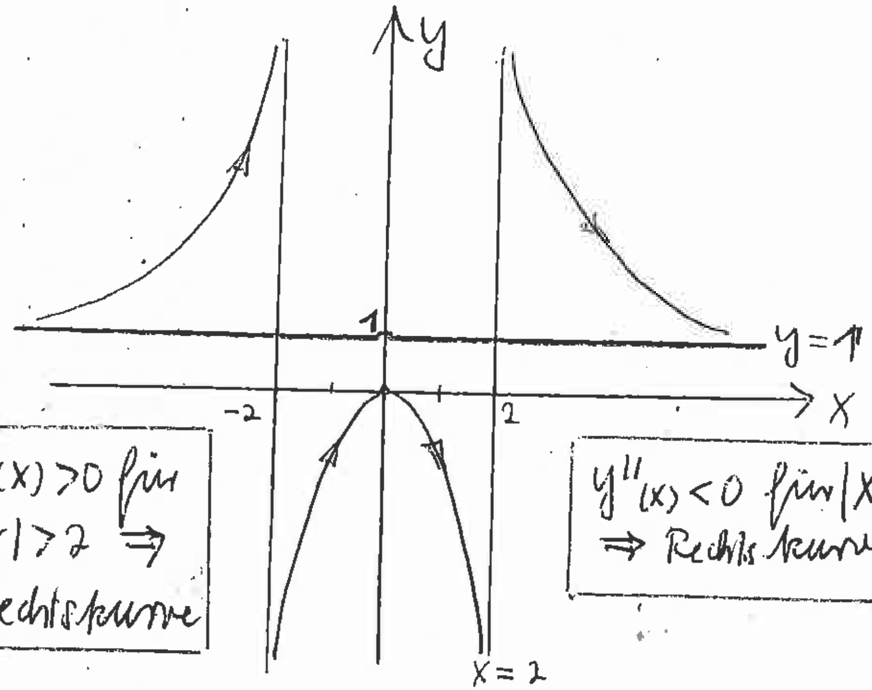
$y = 1$ ist Asymptote

5) Extrema: $y' = f'(x) = -\frac{4 \cdot (2x)}{(x^2-4)^2} = 0$

1. Fortsetzung Aufgabe 4a) Seite 86

$y'(x) = -\frac{8x}{(x^2-4)^2} = -y'(-x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

Wegen $\left\{ \begin{matrix} y'(0+0) < 0 \\ y'(0-0) > 0 \end{matrix} \right\}$ folgt $\boxed{P_{Hoch}(0/0)}$



$y''(x) > 0$ für $|x| > 2 \Rightarrow$ Rechtskurve

$y''(x) < 0$ für $|x| < 2 \Rightarrow$ Rechtskurve

6) Wendepunkte: $y'' = -8 \frac{[(x^2-4)^2 \cdot 1 - x(x^2-4) 2 \cdot 2x]}{(x^2-4)^4}$

$y'' = -8 \frac{[(x^2-4) - 4x^2]}{(x^2-4)^3} = +8 \frac{[3x^2+4]}{(x^2-4)^3}$

4-6) $f(x) = \frac{x^3+x^2-9}{x^2-9} = \frac{x^3}{x^2-9} + 1$

1) Durch Verschieben der punktsymmetrischen Bildkurve von $g(x) = \frac{x^3}{x^2-9} = -g(-x)$ um 1 in positive y-Richtung erhält man $f(x)$, d.h. $f(x)$ ist symmetrisch zu $P(0|1)$

2) Pole: $\boxed{x_1 = 3}$, $\boxed{x_2 = -3}$, mit Vorzeichenwechsel

$\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -3+0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) = -\infty$

3) Asymptoten: $x^3+x^2-9 : (x^2-9) = x+1+\frac{9x}{x^2-9}$

$$\begin{array}{l} x^3 - 9x \\ \hline x^2+9x-9 \\ x^2 \quad\;\; -9 \\ \hline \quad 9x \end{array}$$

$\boxed{y_{as} = x+1}$

4) Schnittpunkt von $y = f(x) = (x+1) + \frac{9x}{x^2-9}$ mit der y-Achse: $x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$ $\boxed{P(0|1)}$

5) Extremwerte: $y = f(x) = x+1+\frac{9x}{(x^2-9)}$

$y' = 1 + 9 \cdot \frac{(x^2-9) - x \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = 1 - 9 \cdot \frac{(+x^2+9)}{(x^2-9)^2}$

$y' = \frac{(x^2-9)^2 - 9(x^2+9)}{(x^2-9)^2} = \frac{x^2(x^2-27)}{(x^2-9)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x_{1|2} = 0$ und $x_{3|4} = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$

Beim Durchgang durch $x=0$ ändert $y'(x)$ wegen $y'(0+\varepsilon^2) = y'(0-\varepsilon^2)$ sein Vorzeichen nicht. Daher liegt weder ein Hochpunkt noch ein Tiefpunkt vor, sondern ein Sattelpunkt, d.h. ein

Wendepunkt $W(0|1)$ mit horizontaler Tangente

$\left.\begin{array}{l} y'(x=3\sqrt{3}+\varepsilon^2) > 0 \\ y'(x=3\sqrt{3}-\varepsilon^2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Tiefpunkt } T(3\sqrt{3}|8{,}79)}$

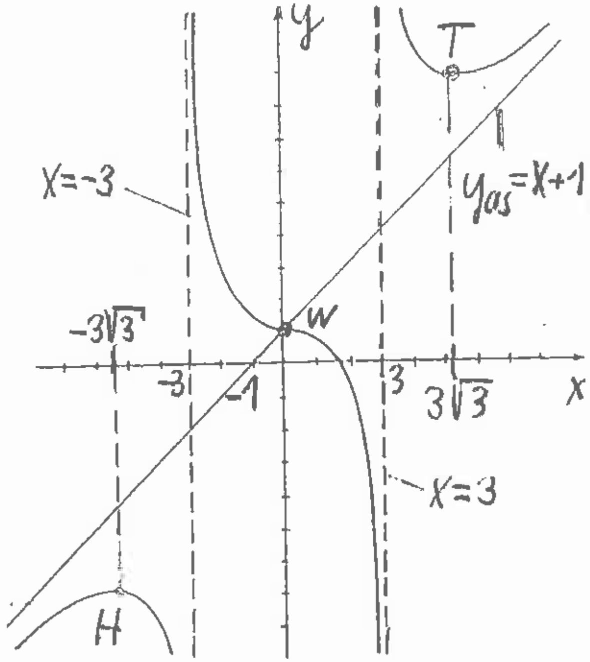
$\left.\begin{array}{l} y'(x=-3\sqrt{3}+\varepsilon^2) < 0 \\ y'(x=-3\sqrt{3}-\varepsilon^2) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Hochpunkt $H(-3\sqrt{3}|-6{,}79)$

H. Schäffler

Bildkurve von

$$\boxed{f(x)=\frac{(x^3+x^2-9)}{(x^2-9)}}$$

Aufgabe 4b



5) Welche gebrochenrationale Funktion mit Zählergrad 2 und Nennergrad 1 besitzt den Kurvenpunkt P(O/-1) und die Asymptoten y = x + 1 und x = 1 ? Diskutieren und skizzieren Sie diese Funktion.

Ansatz: $y=(x+1)+\frac{c}{(x-1)}$; mit $P(0/-1) \Rightarrow$

$-1=1+\frac{c}{-1} \Rightarrow c=2 \Rightarrow y=x+1+\frac{2}{(x-1)}$

$$y=\frac{(x+1)(x-1)+2}{(x-1)}=\boxed{\frac{x^2+1}{x-1}=y}$$

5a) keine Nullstellen

5b) Pole: $x=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$, d.h. Pol mit Vorzeichenwechsel

5c) $y=x+1+\frac{2}{x-1} \Rightarrow \boxed{y_{as}=x+1} \Rightarrow$

$y>y_{as}$ für $x>1$ und $y<y_{as}$ für $x<1$

5d) Extremwerte: $y'=1-\frac{2}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow$

$x_{1/2}=1\pm\sqrt{2} \Rightarrow x_1=2{,}414$; $x_2=-0{,}414$

$y''(x)=\frac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow$

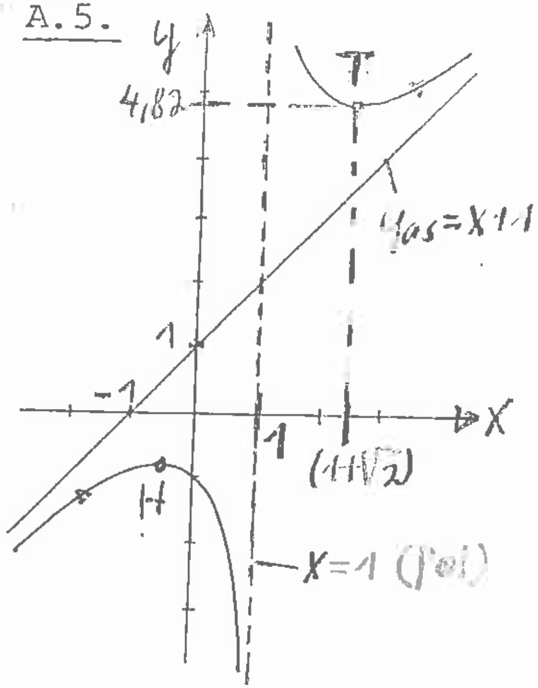
$\boxed{y''(1+\sqrt{2})>0 \quad T(1+\sqrt{2}/4{,}825)} \Rightarrow$

$\boxed{y''(1-\sqrt{2})<0 \quad H(1-\sqrt{2}/-0{,}825)} \Rightarrow$

$x>1 \Rightarrow y''>0$, Linkskurve.

$x<1 \Rightarrow y''<0$, Rechtskurve

A.5.



Aufgaben 9.7 Nr. 6.a Seite 86

$$\boxed{f(x) = y = \frac{1-\sin x}{\cos x}} \Rightarrow f(0) = f(2\pi) = 1$$

1) $\boxed{\text{Periode } p = 2\pi}$ da $f(x) = f(x+2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

2) $\boxed{\text{Nullstellen}}$: $1-\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
$\cos x \neq 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1-\sin(\pi/2)}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$ existiert zunächst nicht

$$\lim_{x\to\pi/2} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{-0}{-1} = \boxed{0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ ist eine hebbare Unstetigkeit: $P(\frac{\pi}{2}|0)$

3) $\boxed{\text{Unendlichkeitsstellen}}$: $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$

$N(x) = 0,\ Z(x) \neq 0 \Rightarrow N(x) = \cos x = 0 \Rightarrow \begin{matrix} (x_1 = \pi/2) \\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \end{matrix}$

$\boxed{x = \frac{3\pi}{2} \text{ ist Unendlichkeitsstelle (Pol mit Vorzeichenwechsel)}}$

$f(x = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon^2) = \frac{1-\sin(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon^2)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon^2)} = \frac{Z}{N} > 0$ da $Z > 0$ und $N > 0$

$f(x = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon^2) = \frac{Z}{N} < 0$, da $Z > 0$ und $N < 0$
($\cos x < 0$ im 3. Quadranten)

Fortsetzung Aufgaben 9.7 Nr. 6 a Seite 86

4) Extrema: $y' = \frac{\cos x(-\cos x) - (1-\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$$y' = \frac{-\cos^2 x - (-\sin x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin x}{\cos^2 x}$$

$\boxed{y' = \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}} = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{(\sin\frac{\pi}{2}) - 1}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\pi/2} y' = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\cos x(-\sin x)} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\sin 2x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/2} f'(x) = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{[-\sin x]}{(2\cos 2x)} = +\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\cos\pi} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\text{Also kein Extremwert !!!}}$

5) Wendepunkte: $y'' = \frac{\cos^2 x \cdot \cos x - (\sin x - 1)2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x}$

$$y'' = \frac{\cos^2 x + 2\sin x(\sin x - 1)}{\cos^3 x} = \frac{\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} + \sin^2 x - 2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$y'' = \frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{\cos^3 x} = \frac{(\sin x - 1)^2}{\cos^3 x} \Rightarrow$$

$y''(\frac{\pi}{2} - \varepsilon^2) > 0$ da $\cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon^2) > 0 \Rightarrow$ Linkskurve für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$y''(\frac{\pi}{2} + \varepsilon^2) < 0$ da $\cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon^2) < 0 \Rightarrow$ Rechtskurve für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

$y''(\frac{\pi}{2}) = \frac{0}{0} = ?$

Aufgaben 9.7 Nr. 6a Seite 86

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y''(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{2(\sin x-1)\cancel{\cos x}}{3\cos^{\cancel{2}} x(-\sin x)}\right\}$$

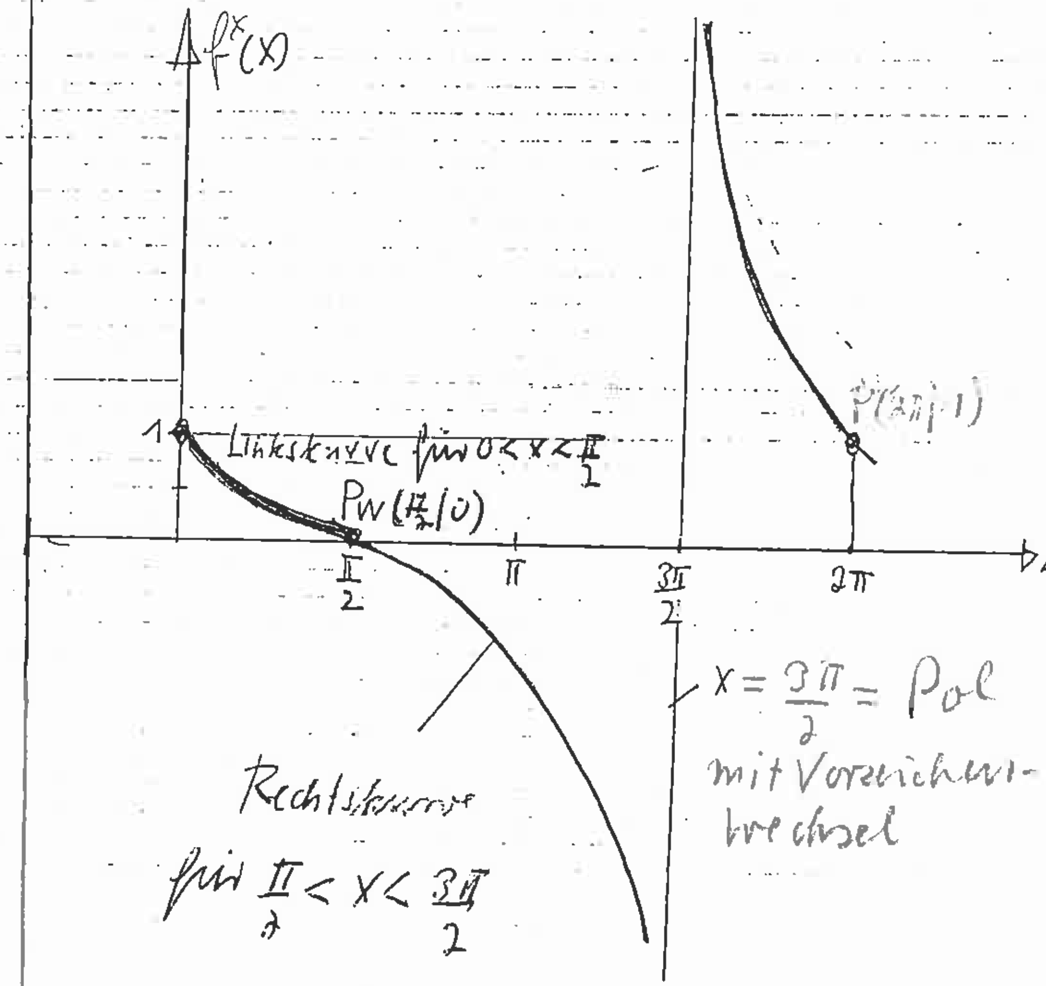
$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\frac{(\sin x-1)}{3\cos x\sin x} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{(\sin x-1)}{\frac{\sin 2x}{2}}\right\}$$

$$= -\frac{4}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\cos x}{2\cos 2x}\right\} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{\cos\pi/2}{2\cos\pi} = \frac{0}{-6} = 0$$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y''(x) = 0$	d.h. $x=\frac{\pi}{2}$ ist Wendepunkt der stetig ergänzten Funktion $f^{*}(x)$

$$f^{*}(x) = \begin{cases} \frac{1-\sin x}{\cos x} = f(x) & \text{für } x \neq \pi/2 \\ 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1-\sin x}{\cos x}\right\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = f(x+2\pi)}$$



Für $x=\pi/2$ ergibt sich wegen $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{0}{0}$ zunächst eine Lücke, die aber mittels $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = f(\frac{\pi}{2})$ ausgefüllt wird.

5b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{3 \cos x}{2 - \sin x}$.

a) Welche Periode hat f(x) ?

b) Man bestimme für $0 \le x \le 2\pi$ Nullstellen (samt Steigung), Extremwerte und Wendepunkte und entwerfe ein Bild der Funktionskurve.

c) Welchen Inhalt hat die Fläche, die von der Kurve und der x-Achse zwischen den Nullstellen eingeschlossen wird ?

3c) $A = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos x \cdot dx}{2-\sin x} = -3\ln|2-\sin x| \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} = 3\ln 3 = \ln 27$

a) Wegen $f(x) = f(x+2\pi)$ ist die Periode $\boxed{P = 2\pi}$

b) Nullstellen: $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

Extremwerte: $y' = 3\frac{(2-\sin x)(-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(2-\sin x)^2}$

$y' = 3\frac{(1-2\sin x)}{(2-\sin x)^2} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \pi/6 \\ x_2 = 5\pi/6 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} y'(\frac{\pi}{6}+\varepsilon^2) < 0 \\ y'(\frac{\pi}{6}-\varepsilon^2) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Hochpunkt $H(\frac{\pi}{6}|\sqrt{3})$

$\left.\begin{matrix} y'(\frac{5\pi}{6}+\varepsilon^2) > 0 \\ y'(\frac{5\pi}{6}-\varepsilon^2) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(\frac{5\pi}{6}|-\sqrt{3})$

$y'' = 3\frac{(2-\sin x)^2(-2\cos x) - (1-2\sin x)2(2-\sin x)(-\cos x)}{(2-\sin x)^4}$

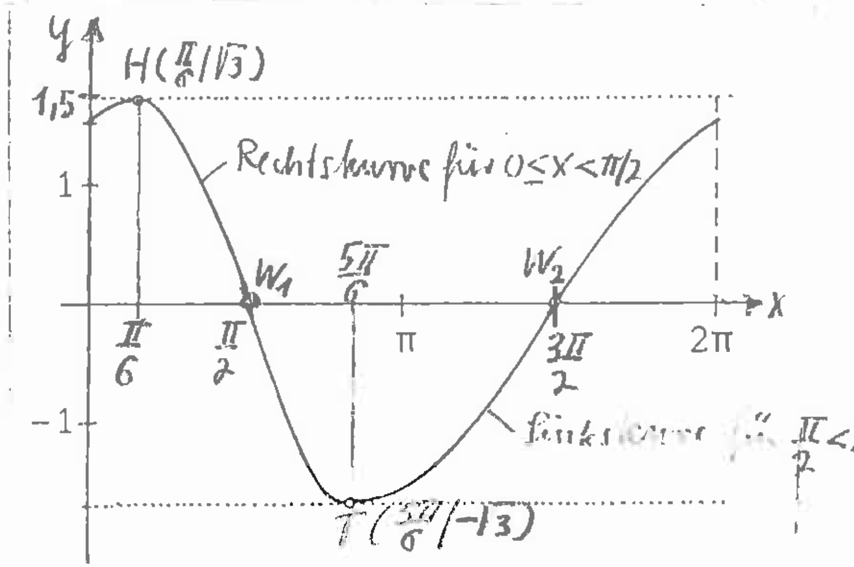
$y'' = 3\frac{(2-\sin x)(-2\cos x) + 2\cos x \cdot (1-2\sin x)}{(2-\sin x)^3}$

$y'' = -6 \cdot \frac{\cos x(1+\sin x)}{(2-\sin x)^3} = 0 \Rightarrow$

$\cos x = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = \pi/2 \\ x_2 = 3\pi/2 \end{matrix}\right. \Big\| \begin{matrix} \sin x = -1 \Rightarrow \\ x = 3\pi/2 \end{matrix}$

$y''(\frac{\pi}{2}+\varepsilon^2) > 0$ und $y''(\frac{\pi}{2}-\varepsilon^2) < 0 \Rightarrow W_1(\frac{\pi}{2}|0)$

$y''(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon^2) < 0$ und $y''(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon^2) > 0 \Rightarrow W_2(\frac{3\pi}{2}|0)$



7. Gegeben ist die Funktionen-Familie $f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{a + e^x}$, $a > 0$.

a) Zeigen Sie, daß die Funktionen $f_a(x)$ streng monoton wachsen.

b) Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktionen $y = f_a^{-1}(x)$?

c) Bestimmen Sie Asymptoten und Wendepunkt des Schaubilds von $f_a(x)$.

d) Für welches a geht die Wendetangente durch den Ursprung (O/O) ?

e) Zeichnen Sie das Schaubild von $f_4(x)$. Verwenden Sie dazu neben Wendepunkt und Wendetangente Funktionswert und Steigung für $x = -2, 0, 4$.

f) Berechnen Sie für $a = e^2$ den Inhalt der Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x = 2$.

a) $f_a(x) = \frac{ae^x}{a+e^x} = \frac{a}{\frac{a}{e^x}+1} \Rightarrow$ für wachsendes x wächst $f_a(x)$

andere Begründung: $f_a'(x) = a \cdot \frac{(a+e^x)e^x - e^x e^x}{(a+e^x)^2}$

$f_a'(x) = \frac{a^2 e^x}{(a+e^x)^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $y = \frac{ae^x}{a+e^x} \Rightarrow e^x(a-y) = ay \Rightarrow e^x = \frac{ay}{(a-y)}$

$x = \ln\left\{\frac{ay}{a-y}\right\} \Rightarrow \boxed{y_{umk} = f_a^{-1}(x) = \ln\left(\frac{ax}{a-x}\right)}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{a}{\frac{a}{e^x}+1}\right) = a \Rightarrow \boxed{y_{as} = a}$

horizontale Asymptoten

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{a}{\frac{a}{e^x}+1}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{y_{as} = 0}$

$f_a''(x) = a^2 \frac{(a+e^x)^2 \cdot e^x - e^x \cdot 2(a+e^x)e^x}{(a+e^x)^4} = a^2 \cdot \frac{(a-e^x)e^x}{(a+e^x)^3}$

$f_a''(x) = 0 \Rightarrow e^x = a \Rightarrow x = \ln a \Rightarrow y = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$

$\underbrace{f_a''(x<\ln a) > 0}_{\text{Linkskurve}}$ und $\underbrace{f_a''(x>\ln a) < 0}_{\text{Rechtskurve}} \Rightarrow \boxed{W\left(\ln a \middle| \frac{a}{2}\right)}$

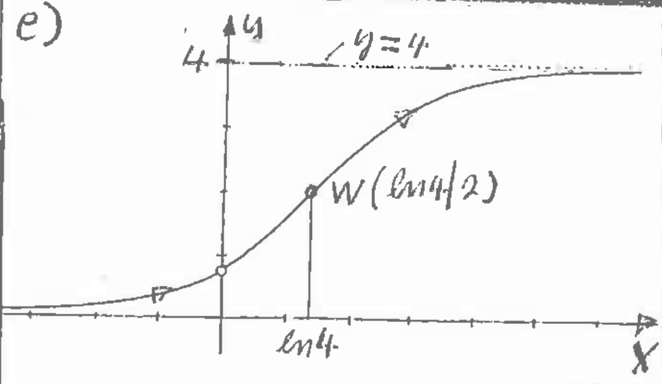
d) Tangente im Wendepunkt $P_W\left(\ln a \middle| \frac{a}{2}\right)$:

$\frac{y_T - a/2}{x - \ln a} = f_a'(\ln a) = \frac{a^2 e^{\ln a}}{(a+e^{\ln a})^2} = \frac{a^3}{(2a)^2} = \frac{a}{4}$

$\boxed{y_T(x) = \frac{a}{4} \cdot x + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\ln a\right)} \Rightarrow P(0|0)$: $\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\ln a = 0$

$\ln a = 2 \Rightarrow \boxed{a = e^2}$

e)



x	0	-2	4	ln4
f_a	0,8	0,131	3,73	2
f_a'	$\frac{16}{25}$	0,127	0,254	1

$x < \ln 4 \Rightarrow$ Linkskurve

$x > \ln 4 \Rightarrow$ Rechtskurve

f) $A = \int_0^2 \frac{ae^x\,dx}{(a+e^x)} = a \cdot \ln(a+e^x)\Big|_0^2 = a\ln\left(\frac{a+e^2}{a+1}\right)$

$A(a=e^2) = e^2 \cdot \ln\left(\frac{2e^2}{e^2+1}\right) = 4{,}184$

8. Diskutieren und skizzieren Sie die Funktionen (in ein Koordinatensystem):

a) $f_1(x) = \ln(x^2 - 1)$ b) $f_2(x) = \ln(1 - x^2)$

8a) $\boxed{f_1(x) = \ln(x^2-1)}$

a1) Symmetrie zur y-Achse: $f_1(-x) = f_1(x)$

a2) Nullstellen: $(x^2-1) = 1 \Rightarrow \boxed{x_{1/2} = \pm\sqrt{2}}$

a3) Definitionsbereich: $(x^2-1) > 0 \Rightarrow$

$x^2 > 1 \Rightarrow |x| > \sqrt{1} = 1 \Leftrightarrow x > 1$ und $x < -1$

$D_{f_1} = \{x \mid |x| > 1\} = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; $W_{f_1} = \mathbb{R}$

a4) Unendlichkeitsstelle (senkrechte Asymptote)

$f_1(x) \to -\infty$ für $x \to 1+$ und für $x \to -1-$

oder $\lim\limits_{x\to 1+} f_1(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to -1-} f_1(x) = -\infty$

also sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ senkrechte Asympt.

a5) Extrema: $f_1'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)} = 0 \Rightarrow x = 0$

Da $x = 0$ nicht zum Definitionsbereich f_1 gehört existieren $\boxed{\text{keine Extrema}}$

a6) Wendepunkte:

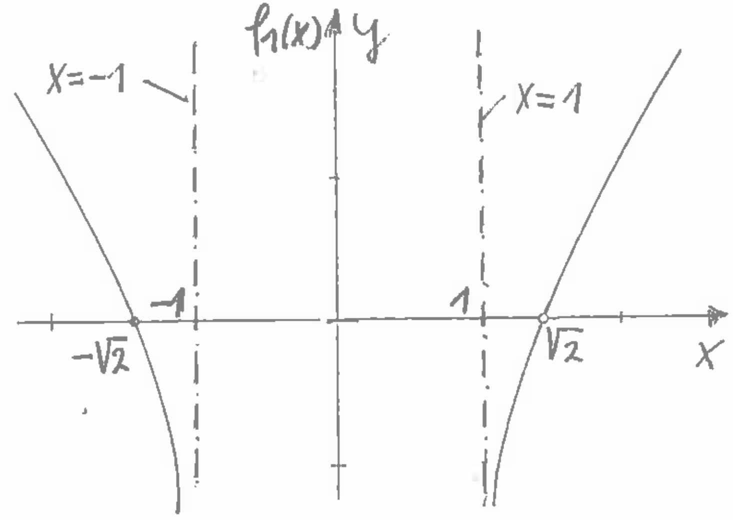
$$f_1''(x) = 2\frac{(x^2-1)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -2\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

Aus $f_1''(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt:

1) Es existieren keine Wendepunkte

2) Es existieren nur Rechtskurven

a7)



$\boxed{\text{Aufgabe 8 6 Seite 86}}$

$$\boxed{y = f_2(x) = \ln(1-x^2)}$$

b1) Symmetrie zur y-Achse: $f_2(-x) = f_2(x)$

b2) Nullstellen: $(1-x^2) = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{P(0|0)}$

b3) Definitionsbereich

$(1-x^2) > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow \boxed{-1 < x < 1}$

$D_{f_2} = \{x \,|\, |x| < 1\} = (-1;1)$; $\boxed{W_{f_2}: y \leq 0}$

b4) Unendlichkeitsstellen:

$f_2(x) \to -\infty$ für $x \to 1-$ und für $x \to -1+$

oder: $\lim\limits_{x \to 1-} f_2(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -1+} f_2(x) = -\infty$

Also sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ senkrechte Asymptoten

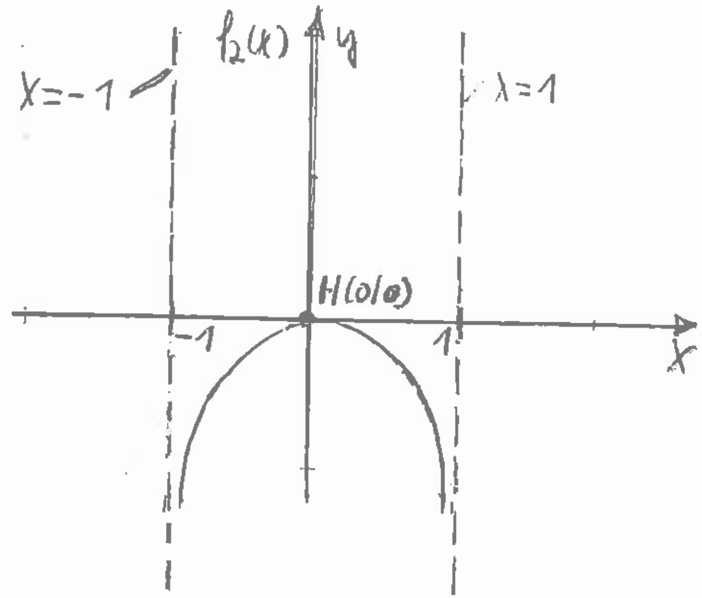
b5) Extrema: $f_2'(x) = \dfrac{-2x}{(1-x^2)} = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_2'(0+\varepsilon^2) < 0$ und $f_2'(0-\varepsilon^2) > 0 \Rightarrow \boxed{H(0|0)}$

b6) Wendepunkte: $f_2''(x) = -2\left\{\dfrac{(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2}\right\}$

$f_2''(x) = -2\,\dfrac{(x^2+1)}{(1-x^2)^2} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

d.h. keine Wendepunkte und überall Rechtskurve



9. Gegeben sind zwei Kurven K_1 und K_2 durch die Gleichungen

K_1: $y = f_1(x) = \ln(\frac{x^3}{8} - 1)$; K_2: $y = f_2(x) = \ln(3x - \frac{x^2}{4} - 1)$

a) Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Asymptoten und Extremwerte der beiden Kurven.

b) Skizzieren Sie die Kurven mit Hilfe der Ergebnisse aus Teil a).

c) In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven K_1 und K_2?

9a) $\boxed{y = f_1(x) = \ln\left(\frac{x^3}{8} - 1\right)}$

Definitionsbereich: $\left(\frac{x^3}{8} - 1\right) > 0 \Rightarrow \boxed{x > 2}$

Nullstellen: $\left(\frac{x^3}{8} - 1\right) = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{16} = 2{,}52}$

senkrechte Asymptoten: $\left(\frac{x^3}{8} - 1\right) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$f_1(x) \to -\infty$ für $x \to 2+ \Leftrightarrow \lim_{x \to 2+} f_1(x) = -\infty$

Extremwerte: $f_1'(x) = \frac{(3x^2/8)}{(x^3/8) - 1} > 0$ für $x > 2$

d.h. $f(x)$ steigt streng monoton.

$f_1'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; weil $x = 0$ außerhalb von $D_{f_1} = (2, \infty)$ liegt gibt es keine Extrema

$\boxed{y = f_2(x) = \ln\left(3x - \frac{x^2}{4} - 1\right)}$

Nullstellen: $\left(-\frac{x^2}{4} + 3x - 1\right) = 1 \Rightarrow$

$-\frac{x^2}{4} + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_{1,2} = +6 \pm \sqrt{28} = \begin{cases} 11{,}29 = x_1 \\ 0{,}71 = x_2 \end{cases}}$

Senkrechte Asymptoten: $-\frac{x^2}{4} + 3x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{x_1 = 6 + \sqrt{32} = 11{,}657 \text{ und } x_2 = 6 - \sqrt{32} = 0{,}343}$

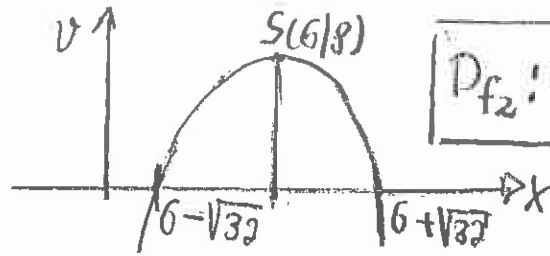
Extremwerte: $f_2'(x) = \frac{(3 - x/2)}{(3x - \frac{x^2}{4} - 1)} = 0 \Rightarrow x = 6$

$f_2'(6 + \varepsilon^2) < 0$ und $f_2'(6 - \varepsilon^2) > 0 \Rightarrow \boxed{H(6 | \ln 8)}$

Definitionsbereich von $f_2(x)$: $(3x - \frac{x^2}{4} - 1) > 0$

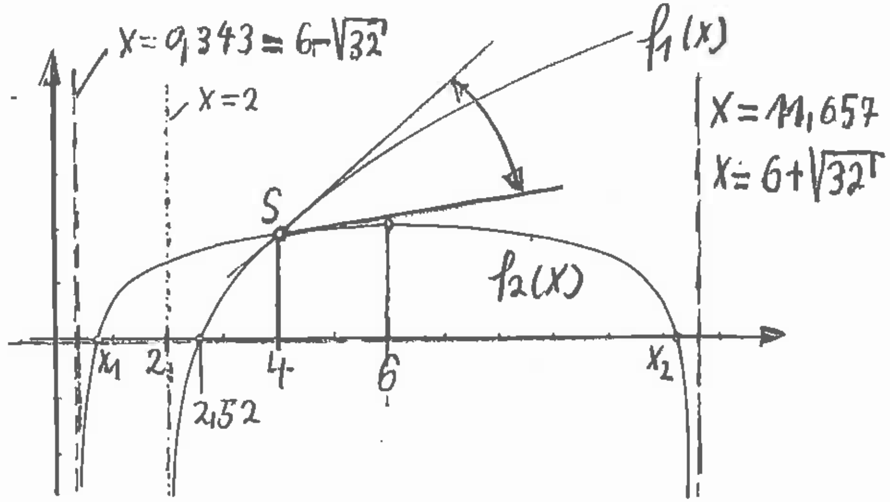
Parabel $v = (-\frac{x^2}{4} + 3x - 1) > 0 \Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 6 + \sqrt{32}$, $x_2 = 6 - \sqrt{32}$

$v'(x) = 3 - x/2 = 0 \Rightarrow$ Scheitel $S(6|8)$



$\boxed{D_{f_2}: (6 - \sqrt{32}) < x < (6 + \sqrt{32})}$

Aufgabe 9b: Skizzen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$



Nullstellen von $f_2(x)$ $\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0{,}71 = 6-\sqrt{28} \\ x_2 = 11{,}29 = 6+\sqrt{28} \end{array}\right.$

Aufgabe 9c: Schnittpunkt S und Schnittwinkel ϕ von $f_1(x)$ und $f_2(x)$

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow \ln\left(\frac{x^3}{8}-1\right) = \ln\left(3x-\frac{x^2}{4}-1\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^3}{8}-1 = 3x-\frac{x^2}{4}-1} \Rightarrow \frac{x^3}{8} = 3x-\frac{x^2}{4}$$

$$x\left(\frac{x^2}{8}+\frac{x}{4}-3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\left.\left(\frac{x^2}{8}+\frac{x}{4}-3\right) = 0 \Rightarrow x^2+2x-24 = 0\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -6 \\ x_3 = 4 \end{array}$$

Nur $x_3 = 4$ liegt in D_{f_1} und D_{f_2}

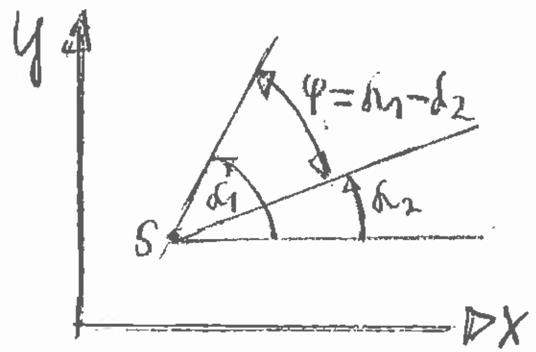
$$x_2 = 4 \Rightarrow f_1(4) = \ln\left(\frac{64}{8}-1\right) = \ln 7 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Schnittpunkt } S(4/\ln 7)}$$

Schnittwinkel φ von $f_1(x)$ und $f_2(x)$

$$f_1'(x) = \frac{3x^2/8}{(x^3/8)-1} \Rightarrow f_1'(4) = \frac{6}{7} = \tan\delta_1 \Rightarrow \delta_1 = 40{,}60^\circ$$

$$f_2'(x) = \frac{3-x/2}{\left(3x-\frac{x^2}{4}-1\right)} \Rightarrow f_2'(4) = \frac{1}{7} = \tan\delta_2 \Rightarrow \delta_2 = 8{,}13^\circ$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi = \delta_1-\delta_2 \\ \hline \varphi = 40{,}60^\circ - 8{,}13^\circ \\ \varphi = 32{,}47^\circ \end{array}}$$

Nachtrag zu Aufgabe 9a:

Definitionsbereich von $f_2(x) = \ln\left(3x - \frac{x^2}{4} - 1\right)$

$$\left(-\frac{x^2}{4} + 3x - 1\right) > 0 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{4} - 3x + 1\right) < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}\left(x^2 - 12x + 4\right) < 0 \Rightarrow \left(x^2 - 12x + 4\right) < 0$$

$$\left\{(x-6)^2 - 32\right\} < 0 \Rightarrow (x-6)^2 < 32 \Rightarrow$$

$$|x-6| < \sqrt{32} \Rightarrow -\sqrt{32} < (x-6) < \sqrt{32}$$

$$\boxed{(6-\sqrt{32}) < x < (6+\sqrt{32})}$$

2) Nachweis, daß die Bildkurve von $f_2(x) = \ln\left(3 - \frac{x^2}{4} - 1\right)$ symmetrisch zur Geraden $x = 6$ ist

Wenn diese Symmetrie besteht, dann muß die Verschiebung der Bildkurve von $f_2(x)$ um 6 in Richtung der negativen x-Achse eine Kurve $f_3(x)$ ergeben, die symmetrisch zur y-Achse ist. Es muß dann gelten:

$$f_3(x) = f_2(x+6) = f_3(-x)$$

$$f_3(x) = \ln\left\{3(x+6) - \frac{(x+6)^2}{4} - 1\right\}$$

$$f_3(x) = \ln\left\{3x + 18 - \frac{x^2}{4} - 3x - 9 - 1\right\}$$

$$\boxed{f_3(x) = \ln\left\{8 - \frac{x^2}{4}\right\} = f_3(-x)}$$

Verschiebt man umgekehrt $f_3(x)$ um $\Delta x = 6$ in positive x-Richtung, so erhält man: $f_3(x-6) = f_2(x)$