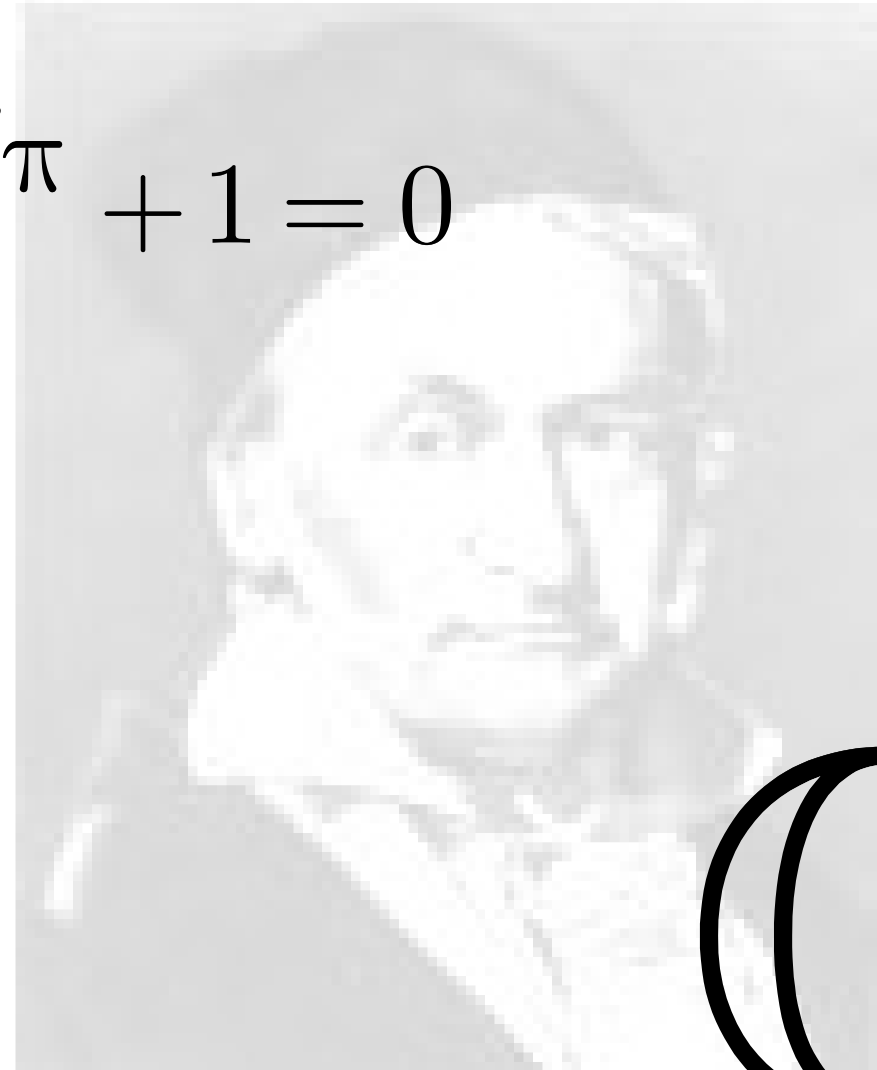
BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Höhere Mathematik II

Übungen

Komplexe Zahlen

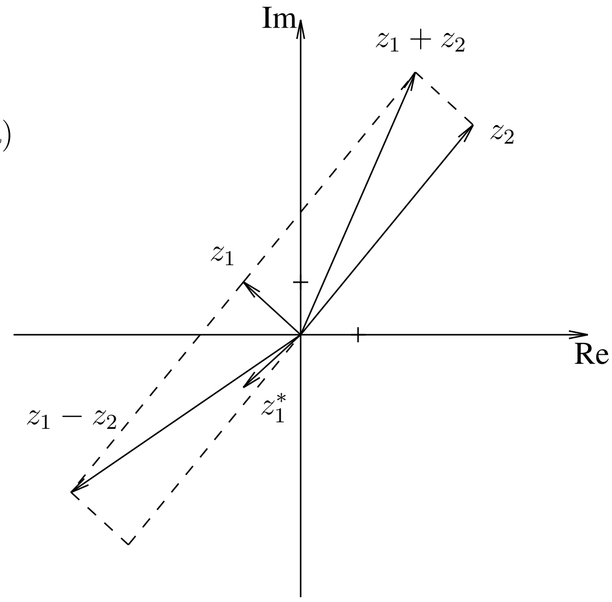
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



$$\mathbb{C}$$

Aufgabe 1: Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = -1 + j; z_2 = 3 + 4j$.

a) Skizzieren Sie in der Gaußschen Ebene
$z_1, z_2, z_1^*; \quad z_1 + z_2, z_1 - z_2$



b) Überprüfen Sie die Ergebnisse aus a) rechnerisch.

$z_1^* = -1 - j;$
$z_1 + z_2 = 2 + 5j;$
$z_1 - z_2 = -4 - 3j;$

c) Berechnen Sie
$|z_1|, |z_2|, |z_1^*|, \arg z_1, \arg z_2, \arg z_1^*$.

$|z_1| = \sqrt{1+1};$
$|z_2| = \sqrt{9+16} = 5;$
$|z_1^*| = |z_1| = \sqrt{2}$

$\tan(\arg z_1) = \frac{1}{-1} \quad \rightsquigarrow$
$\arg z_1 = \frac{3\pi}{4}(135^o)$

$\tan(\arg z_2) = \frac{4}{3} \quad \rightsquigarrow$
$\arg z_2 = 0.927...(53.13^o)$
$\arg z_1^* = -\arg z_1$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen.

Wie groß sind jeweils Betrag und Argument ?

a) $\frac{-2+7j}{15j} = \frac{7}{15} + \frac{2}{15}j; \quad |\ldots| = \frac{\sqrt{49+4}}{15}; \quad \tan\varphi = \frac{2}{7} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = 0.278..\ (15.94..^o)$

b) $\frac{1+j}{1-j} = \frac{(1+j)(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{2j}{2} = j; \quad |\ldots| = 1; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{1-j}{1+2j} - \frac{1+3j}{1-2j} = \frac{(1-j)(1-2j)}{(1+2j)(1-2j)} - \frac{(1+3j)(1+2j)}{(1-2j)(1+2j)} = \frac{-1-3j}{5} - \frac{-5+5j}{5}$
$= \frac{4-8j}{5}; \quad |\ldots| = \frac{\sqrt{16+64}}{5}; \quad \tan\varphi = \frac{-8}{4} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -1.107..\ (-63.43..^o)$

d) $\frac{2e^{j\pi/4}}{(1+j)(2+j)} = \frac{\sqrt{2}(1+j)}{(1+j)(2+j)} = \frac{\sqrt{2}(2-j)}{5}; \quad |\ldots| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4+1}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5};$
$\tan\varphi = \frac{-1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -0.463..(-26.56..^o)$

e) $2e^{j120^\circ} = 2(\cos 120^o + j\sin 120^o) = -1 + \sqrt{3}j; \quad |\ldots| = \sqrt{1+3} = 2$
$\varphi = \frac{2\pi}{3}\ (120^o)$

f) $3e^{j5\pi/6} = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2}(-\sqrt{3}+j); \quad |\ldots| = \frac{3}{2}\sqrt{3+1} = 3$
$\tan\varphi = \frac{5\pi}{6}$

g) $-5e^{-j\pi/2} = -5(\cos -\frac{\pi}{2} + j\sin -\frac{\pi}{2}) = 5j; \quad |\ldots| = 5; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

h) $7e^{j\pi} = -7; \quad |\ldots| = 7; \quad \varphi = \pi\ (180^o)$

i) $\dfrac{2-j}{2+j} \cdot e^{-j\pi/3} = \dfrac{(2-j)^2}{5} \cdot (\cos -\frac{\pi}{3} \ + \ j\sin -\frac{\pi}{3}) = \dfrac{3-4\sqrt{3} \ + \ (-4-3\sqrt{3})j}{10}$

$|\ldots| = \frac{1}{10}\sqrt{(3-4\sqrt{3})^2 + (-4-3\sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{100}}{10} = 1$

$\tan\varphi = \dfrac{-4-3\sqrt{3}}{3-4\sqrt{3}} = \dfrac{(-4-3\sqrt{3})(3+4\sqrt{3})}{(3-4\sqrt{3})(3+4\sqrt{3})} = \dfrac{48+25\sqrt{3}}{39}$

$\rightsquigarrow \quad \varphi = 4.308..\ (246.86..^o)$

Aufgabe 3: Wie heissen die folgenden komplexen Zahlen in Exponentialform

a) $-1-j = \sqrt{2}e^{j\frac{5\pi}{4}}$

b) $-1+j = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$

c) $3+4j = \sqrt{25}e^{j\varphi} \quad \tan\varphi = \dfrac{4}{3} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = 0.927..\ (53.13..^o)$

d) $-3-4j = \sqrt{25}e^{j\varphi} \quad \tan\varphi = \dfrac{-4}{-3} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = 4.068..\ (233.13..^o)$

e) $2j = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$

f) $-2 = 2e^{j\pi}$

g) $1-2j = \sqrt{5}e^{j\varphi} \quad \tan\varphi = \dfrac{-2}{1} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -1.107...\ (-63.43..^0)$

Aufgabe 4: Es sei $z = x + jy$ und z^* die zu z konjugiert komplexe Zahl. Bestimmen Sie

a) $a = \left|\dfrac{z}{z^*}\right| = 1$

b) $b = \text{Re }(z^{-2})$

$$\begin{aligned} z^{-2} &= \frac{1}{(x+jy)^2} = \frac{1}{x^2-y^2+2xyj} = \frac{x^2-y^2-2xyj}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} \\ &= \frac{x^2-y^2+2xyj}{x^4+2x^2y^2+y^4} = \frac{x^2-y^2-2xyj}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad Re\{...\} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$z^{-2} = r^{-2}e^{j(-2\varphi)} = \dfrac{1}{r^2}[\cos(-2\varphi) \ + \ j\sin(-2\varphi)] = \dfrac{1}{r^2}[\cos(2\varphi) \ - \ j\sin(2\varphi)]$

$\rightsquigarrow \quad Re\{...\} = \dfrac{1}{r^2} \cdot \cos(2\varphi)$

c) $c = \text{Im }(z^{*^3})$

$(z^*)^3 = (x-jy)^3 = x^3 - 3x^2yj - 3xy^2 + y^3j \quad \rightsquigarrow \quad Re\{...\} = y^3 - 3x^2y$

d) $d = \text{Im}[(z^3)^*]$

$(z^3)^* = [(x+jy)^3]^* = [x^3+3x^2yj-3xy^2-y^3j]^* = x^3-3x^2yj-3xy^2+y^3j$

$\rightsquigarrow \quad Re\{...\} = y^3 - 3x^2y$

Punktrechnung und Übergang zur konjugiert komplexen Zahl ist in der Reihenfolge vertauschbar!

Aufgabe 5: Berechnen Sie

a) $\left[\dfrac{3+4j}{5}\right]^{10}$

$\dfrac{3+4j}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{9+16}e^{j\varphi} \quad \tan\varphi = \dfrac{4}{3} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = 0.927...$

$\left[\dfrac{3+4j}{5}\right]^{10} = 1^{10}e^{j10\varphi} = \cos(10\varphi) \ + \ \sin(10\varphi) = 0.988.. \ + \ 0.151.. \ j$

b) $(j + \dfrac{1}{1+j})^6$

$j + \dfrac{1}{1+j} = \dfrac{j(1+j)+1}{1+j} = \dfrac{j}{1+j} = \dfrac{j(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \dfrac{1+j}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

$(j + \dfrac{1}{1+j})^6 = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right]^6 = \frac{1}{8}e^{j\frac{3\pi}{2}} = \dfrac{-j}{8}$

c) $\left[(1+j)\cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}\right]^9$

$(1+j)\cdot e^{-j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{12}}$

$\left[(1+j)\cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}\right]^9 = \left[\sqrt{2}\right]^9 e^{j\frac{3\pi}{4}} = 16\sqrt{2}[\cos(\frac{3\pi}{4}) \ + \ \sin(\frac{3\pi}{4})] = 16(-1 \ + \ j)$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die reellen Werte A und φ aus der Gleichung

$$4e^{j\varphi} = A\left[\frac{1+3j}{1-2j}\right]^2$$

Übergang zu Beträgen:

$|4e^{j\varphi}| = \left|A\left[\dfrac{1+3j}{1-2j}\right]^2\right|$

$$\begin{aligned} 4 &= A\left[\frac{|1+3j|}{|1-2j|}\right]^2 \\ 4 &= A\left[\frac{\sqrt{1+9}}{\sqrt{1+4}}\right]^2 \\ 4 &= A\cdot 2 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad A = 2$

Bestimmung des Winkels:

$e^{j\varphi} = \frac{1}{2}\cdot[...]^2$

$$\begin{aligned} [...] &= \frac{1+3j}{1-2j} = \frac{(1+3j)(1+2j)}{(1-2j)(1+2j)} = \frac{-5+5j}{5} \\ [...]^2 &= -2j \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad \varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

Aufgabe 7: Berechnen Sie alle (reellen und komplexen) Lösungen der Gleichungen

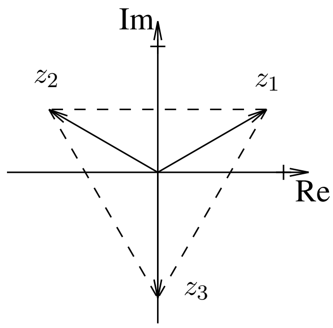
a) $z^3 = j$

$z = \sqrt[3]{1e^{j\frac{\pi}{2}}} = 1e^{j(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{2\pi}{3})}; \ k = 0, \ 1, \ 2$

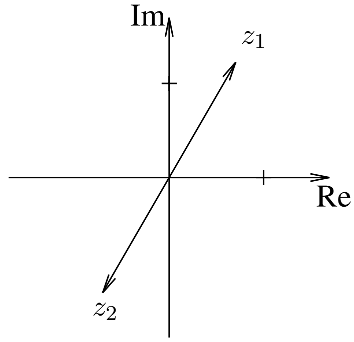
$z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+j)$

$z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+j)$

$z_3 = -j$



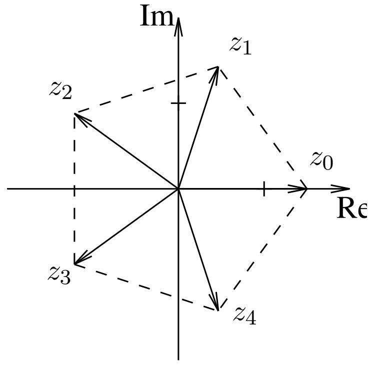
b) $z^2 = -1 + j \cdot \sqrt{3}$



$$z = \sqrt[2]{2e^{j\frac{2\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{3}+k\pi};\ k = 0,1$$

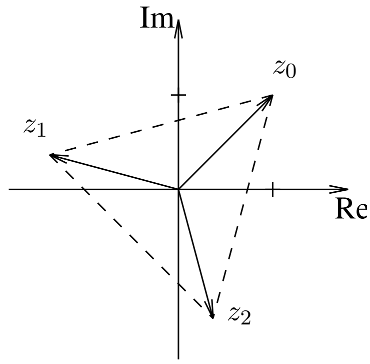
$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}[\cos(\tfrac{\pi}{3}) + j\sin(\tfrac{\pi}{3})] \\ &= \sqrt{2}\cdot(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \\ z_1 &= -z_0 \end{aligned}$$

c) $32z^5 - 243 = 0$



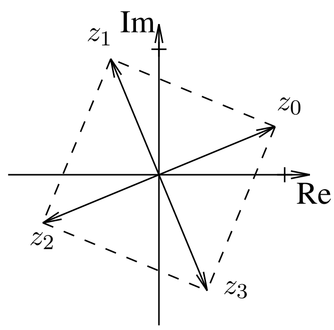
$$\begin{aligned} z &= \sqrt[5]{\frac{243}{32}e^{j0}} \\ &= \sqrt[5]{\frac{243}{32}}e^{j\frac{2k\pi}{5}} \\ &= \tfrac{3}{2}e^{j\frac{2k\pi}{5}};\ k = 0,1,2,3,4 \end{aligned}$$

d) $z^3 + \dfrac{4}{1+j} = 0$



$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{-\frac{4}{1+j}} \\ &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2}e^{j(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})};\ k = 0,1,2 \end{aligned}$$

e) $z^4 - \dfrac{1+2e^{j\frac{\pi}{2}}}{2+e^{-j\frac{\pi}{2}}} = 0$



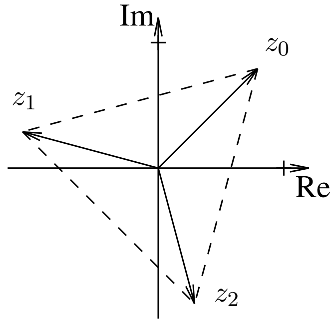
$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{\frac{1+2e^{j\frac{\pi}{2}}}{2+e^{-j\frac{\pi}{2}}}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{1+2j}{2-j}} = \sqrt[4]{j} \\ &= \sqrt[4]{1e^{j\frac{\pi}{2}}} \\ &= 1e^{j(\frac{\pi}{8}+\frac{k\cdot\pi}{2})};\ k = 0,1,2,3 \end{aligned}$$

f) $z^2 - 2jz + 3 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{2j \pm \sqrt{(-2j)^2 - 12}}{2} = j \pm \sqrt{-4} = j \pm 2j$$

Aufgabe 8: In welchen Quadranten der komplexen Ebene besitzt die Gleichung $z^3 + 1 - j = 0$ keine Lösung ?

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{-1+j} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}} \\ &= \sqrt[6]{2}e^{j(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})};\ k = 0, 1, 2 \end{aligned}$$



Aufgabe 9: Zeigen Sie, daß $z_1 = 1 + j$ eine Lösung der Gleichung $z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4 = 0$ ist und geben Sie die restlichen Nullstellen an.

$$(1+j)^4 - 3(1+j)^3 + 2(1+j)^2 + 2(1+j) - 4 = -4 - 3\cdot(-2+2j) + 2\cdot(2j) + 2(1+j) - 4 = 0$$

Mit $z_1 = 1 + j$ ist auch $z_2 = z_1^* = 1 - j$ Nullstelle und damit

$[z - (1 + j)] \cdot [z - (1 - j)] = z^2 - 2z + 2$ als Faktor enthalten:

$$(z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4) : (z^2 - 2z + 2) = z^2 - z - 2 \quad \rightsquigarrow \quad z_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$z_3 = -1;\ z_4 = 2$

Aufgabe 1: Von einem Polynom 5.Grades mit reellen Koeffizienten

$$p_5(z) = 2z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$$

sind folgende Nullstellen bekannt:

$$z_1 = 1\ , \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}j\ , \quad z_3 = j$$

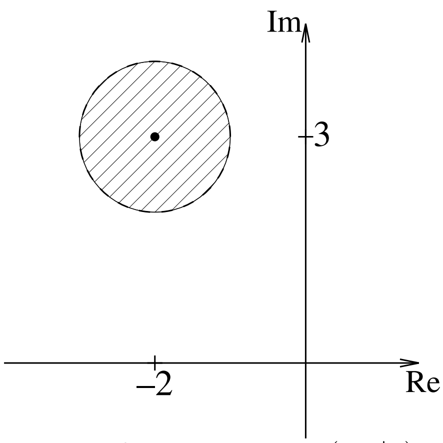
Bestimmen Sie die restlichen Nullstellen sowie die Koeffizienten a_k des Polynoms.

Mit $z_2 = 1 + \sqrt{3}j$ und $z_3 = j$ sind auch $z_4 = z_2^* = 1 - \sqrt{3}j$ sowie $z_5 = z_3^* = -j$ Nullstellen des Polynoms.

$$\begin{aligned} p_5(z) &= 2 \cdot (z-1) \cdot [(z-1-\sqrt{3}j)(z-1+\sqrt{3}j)] \cdot [(z-j)(z+j)] \\ &= (z-1) \cdot [z^2 - 2z + 4] \cdot [z^2 + 1] \\ &= 2 \cdot (z^5 - 3z^4 + 7z^3 - 7z^2 + 6z - 4) \\ &= 2z^5 - 6z^4 + 14z^3 - 14z^2 + 12z - 8 \end{aligned}$$

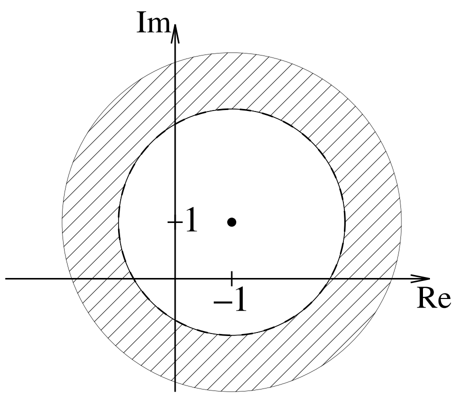
Aufgabe 2: Welche Punkte der komplexen Zahlenebene erfüllen folgende Bedingungen.

a) $|z - z_0| < 1\ ;\ z_0 = -2 + 3j$



Inneres des Kreises um $(-2|3)$ mit Radius 3

b) $2 \leq |z - 1 - j| < 3$



Kreisring um $(1|1)$ mit Innenradius 2 und Außenradius 3 (Der innere Kreis gehört zum Gebiet, der Äußere nicht)

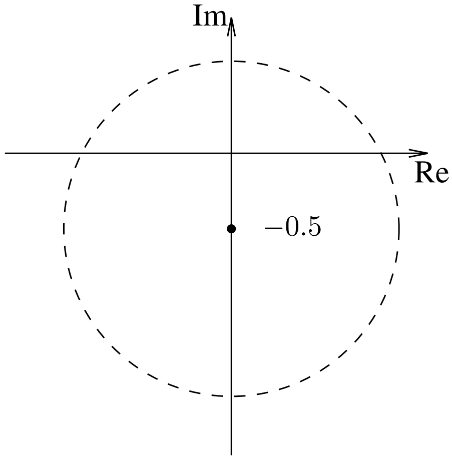
c) $\left|\frac{z-j}{z+j}\right| = 1 \quad \rightsquigarrow \quad |z-j| = |z+j| \quad \rightsquigarrow \quad |z-j|^2 = |z+j|^2 \quad \rightsquigarrow$

$x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 \quad \rightsquigarrow \quad y = 0$ reelle Achse

d) $|z|^2 = 1 - \mathrm{Im}(z)$

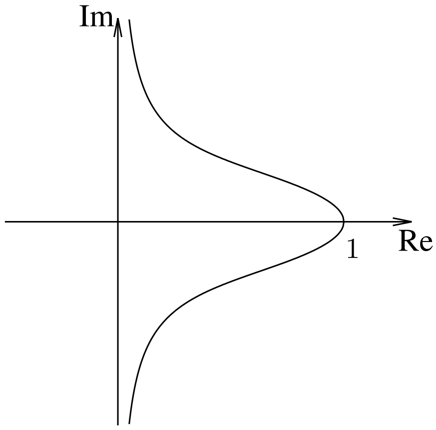
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1-y \quad \rightsquigarrow \\ x^2+y^2+y+\tfrac{1}{4} &= 1+\tfrac{1}{4} \quad \rightsquigarrow \\ x^2+(y+\tfrac{1}{2})^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Kreis um $(0|-\frac{1}{2})$ und Radius $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$



e) $|z|^2 \cdot \mathrm{Re}(z) = 1$

$$\begin{aligned} (x^2+y^2)\cdot x &= 1 \quad \rightsquigarrow \\ y^2 &= \frac{1}{x} - x^2 \quad \rightsquigarrow \\ y &= \pm\sqrt{\frac{1}{x}-x^2} \end{aligned}$$



f) $z^* = z + 6j \quad \rightsquigarrow \quad x - yj = x + yj + 6j \quad \rightsquigarrow \quad y = -3$ .... Parallele zur reellen Achse

Aufgabe 3: Bestimmen Sie durch komplexe Zeigeraddition folgende harmonische Schwingungen mit cos als Grundfunktion.

Wie lauten die entsprechenden Darstellungen mit Sinus als Grundfunktion ? Skizzieren Sie die Schwingungen; wo liegen Nullstellen, Extrema und Wendepunkte ?

a) $$\begin{aligned} 2\cos\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right) - \cos\tfrac{x}{2} &= 2\cos\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\tfrac{x}{2}+\pi\right) \\ 2e^{j\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{j\left(\frac{x}{2}+\pi\right)} &= e^{j\frac{x}{2}}\cdot\left(2e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{j\pi}\right) \\ &= e^{j\frac{x}{2}}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}j-1\right) = \underbrace{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}_{1.4736..}\, e^{j\varphi}\cdot e^{j\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

mit $\tan\varphi = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -1.2858..$

$$2\cos\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right) - \cos\tfrac{x}{2} = \sqrt{5-2\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{x}{2}+\varphi\right) = \sqrt{5-2\sqrt{2}}\sin(\tfrac{x}{2} + \underbrace{\varphi+\tfrac{\pi}{2}}_{0.2849..})$$

b) $3\cos x + 4\sin x = \cos x + 4\cos(x-\frac{\pi}{2})$

$$
\begin{aligned}
3e^{jx} + 4e^{j(x-\frac{\pi}{2})} &= e^{jx} \cdot \left(3e^{j0} + 4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= e^{jx} \cdot (3 - 4j) \\
&= e^{jx} \cdot \sqrt{9+16}e^{j\varphi}
\end{aligned}
$$

mit $\tan\varphi = \dfrac{-4}{3} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -0.9272..$

$3\cos x + 4\sin x = 5\cos(x+\varphi) = 5\sin(x + \underbrace{\varphi + \frac{\pi}{2}}_{0.6435..})$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

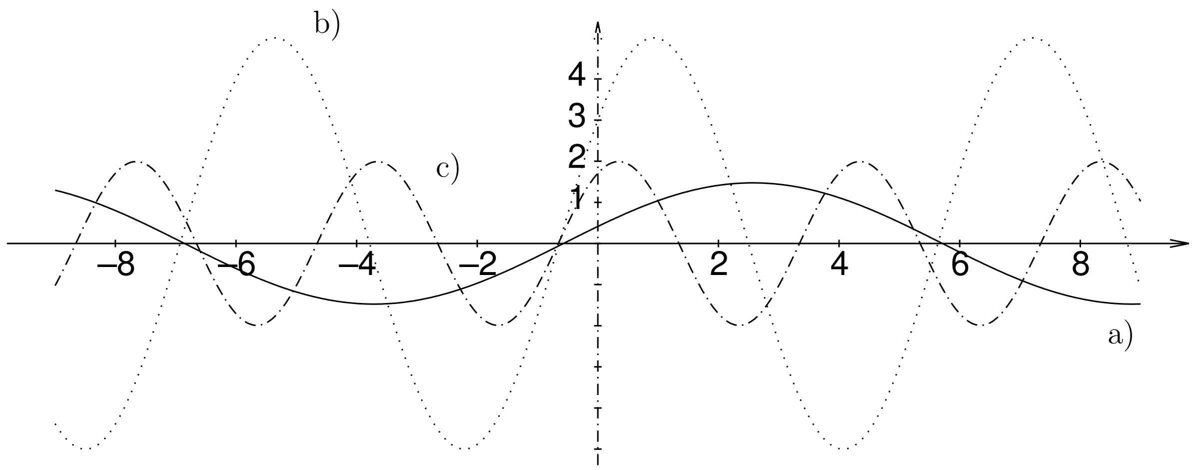
$$
\begin{aligned}
e^{j(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4})} + 2e^{j(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3})} &= e^{j\frac{\pi}{2}x} \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{4}} + 2e^{j-\frac{\pi}{3}}\right) \\
&= e^{\frac{\pi}{2}x} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j + 1 - 3j\right) \\
&= \sqrt{5+\sqrt{2}-\sqrt{6}}e^{j\varphi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}x}
\end{aligned}
$$

mit $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -0.5407..$

$$
\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x + \tfrac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x - \tfrac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{5+\sqrt{2}-\sqrt{6}}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x + \varphi\right)
$$

$$
= \sqrt{5+\sqrt{2}-\sqrt{6}}\sin(\tfrac{\pi}{2}x + \underbrace{\varphi + \frac{\pi}{2}}_{1.0300..})
$$

Skizzen



Aufgabe 4: Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

$f_1(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$; $f_2(t) = a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$

Wie muß die Amplitude a der Schwingung f_2 gewählt werden, damit sich bei der Überlagerung $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ eine reine Cosinus-Schwingung ergibt (Phasenwinkel 0) ? Welche Amplitude hat dann $f(t)$?

$f_2(t) = a\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$

Komplexe Erweiterung:

$f_1(t) + f_2(t) = e^{j(\omega t + \frac{\pi}{4})} \ + ae^{j(\omega t - \frac{\pi}{3})} = e^{j(\omega t} \cdot (e^{j\frac{\pi}{4}} + ae^{-j\frac{\pi}{3}}) =$

$e^{j\omega t} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{a}{2} - a\frac{\sqrt{3}}{2}j)$

Phasenwinkel 0 $\rightsquigarrow$ $\frac{\sqrt{2}}{2} - a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ $\rightsquigarrow$ $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$f(t) = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}_{1.115..} \cdot e^{j\omega t}$$

Aufgabe 5: Diskutieren Sie die Ortskurven

a) $z(t) = t + j(t-3)$

Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t-3 \end{pmatrix}$

b) $z(t) = -2 + j + 3\cos t + 3j\sin t$

$z(t) = -2 + j + 3 \cdot e^{jt}$

Kreis um $z_0 = -2 + j$ mit Radius $r = 3$

c) $z(t) = \frac{j+2}{2-jt}$

$w = \frac{j+2}{2-jt}$ interpretierbar als: $w = f(z) = \frac{j+2}{2-z}$ mit $z = jt$ (imaginäre Achse)

wegen kreisverwandtschaft geht Gerade in Kreis über;

wir bestimmen 3 Punkte:

t	∞	-1	0
w	0	1	$1 + \frac{j}{2}$

dies ist Kreis um Mittelpunkt $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{j}{4}$ und Radius $r = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Kreisgleichung($w = u + jv$): $(u - \frac{1}{2})^2 + (v - \frac{1}{4})^2 = \frac{5}{16}$

direkte Parameterdarstellung:

$$w = u + jv = \frac{j+2}{2-jt} = \frac{(j+2)\cdot(2+jt)}{4+t^2} = \frac{4 - t + (2+2t)j}{4+t^2} \quad \rightsquigarrow$$

$u = \frac{4-t}{4+t^2}$; $\quad v = \frac{2+2t}{4+t^2}$ erfüllt Kreisgleichung!!

d) $z(t) = \frac{jt}{2-jt}$

$w = \frac{jt}{2-jt}$ interpretierbar als: $w = f(z) = \frac{jt}{2-z}$ mit $z = jt$ (imaginäre Achse)

wegen Kreisverwandtschaft geht Gerade in Kreis über;

wir bestimmen 3 Punkte:

t	∞	2	0
w	-1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$	0

dies ist Kreis um Mittelpunkt $w_0 = -\frac{1}{2}$ und Radius $r = \frac{1}{2}$

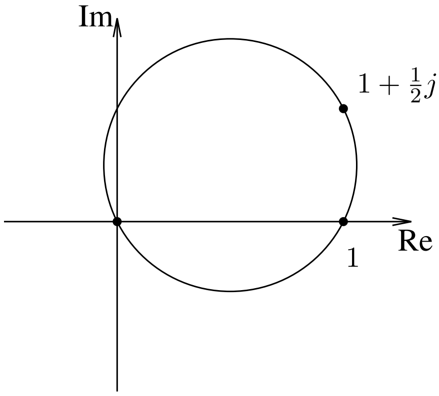
Kreisgleichung($w = u + jv$): $(u + \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$

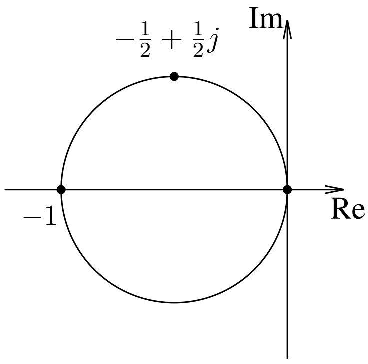
direkte Parameterdarstellung:

$$w = u + jv = \frac{jt}{2-jt} = \frac{(jt)\cdot(2+jt)}{4+t^2} = \frac{-t^2 + +2tj}{4+t^2} \quad \rightsquigarrow$$

$u = \frac{-t^2}{4+t^2}$; $\quad v = \frac{2t}{4+t^2}$ erfüllt Kreisgleichung!!

Skizzen





Aufgabe 6: Gegeben ist die Abbildung $w = \dfrac{1}{z-1}$

a) Bestimmen Sie die Bilder folgender Kurven bzw. Gebiete

wegen Kreisverwandtschaft geht Gerade in Kreis über; wir bestimmen 3 Punkte:

$\mathbf{a}_1$) Einheitskreis

z	1	-1	j
w	∞	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$

Parallele zur imaginären Achse durch $w = -\dfrac{1}{2}$

$\mathbf{a}_2$) reelle Achse

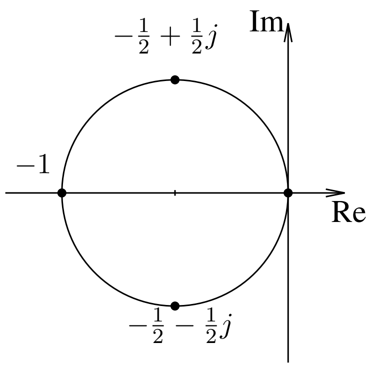
z	1	-1	0
w	∞	$-\frac{1}{2}$	-1

reelle Achse

$\mathbf{a}_3$) imaginäre Achse

z	j	$-j$	0	∞
w	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j$	-1	0

Kreis um $w = -\dfrac{1}{2}$ mit Radius $\dfrac{1}{2}$



$\mathbf{a}_4$) Halbebene $\mathrm{Re}\,(z) < 0$

Grenze geht in den oben bestimmten Kreis über!

$z = -2$ geht in den Punkt $w = -\dfrac{1}{2}$ über.

Damit geht $Re(z) < 0$ ins Innere des Kreises über.

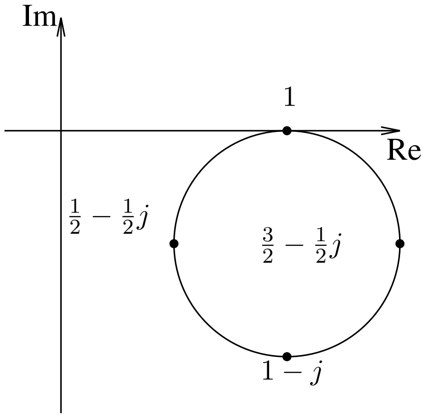
b) Bestimmen Sie die Urbilder folgender Kurven

$$w = \frac{1}{z-1} \quad \rightsquigarrow \quad z = \frac{w+1}{w}$$

b$_1$) $\operatorname{Im}(w) = 1$

w	j	$1+j$	$-1+j$	∞
z	$1-j$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$	1

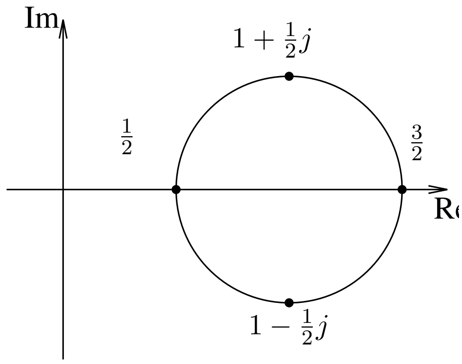
Kreis um $z = 1 - \dfrac{1}{2}j$ mit Radius $\dfrac{1}{2}$



b$_2$) $|w| = 2$

w	2	-2	$2j$	$-2j$
z	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}j$	$1+\frac{1}{2}j$

Kreis um $z = 1$ mit Radius $\dfrac{1}{2}$



Aufgabe 7: Für welche komplexe Zahlen z gilt:

a)
$$\begin{aligned}
\frac{1+j}{1-j}\cdot z + \frac{2z}{2+2j} &= 1\\
\frac{(1+j)^2}{2}\cdot z + \frac{1-j}{2}\cdot z &= 1\\
j\cdot z + \frac{1-j}{2}\cdot z &= 1\\
\frac{1+j}{2}\cdot z &= 1
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad z = 1 - j$

b)
$$\begin{aligned}
\frac{2+j}{2-2j}\cdot z + \frac{4-j}{1+2j} &= 1-j\\
\frac{(2+j)(2+2j)}{8}\cdot z &= 1-j-\frac{(4-j)(1-2j)}{5}\\
\frac{2+6j}{8}\cdot z &= 1-j-\frac{2-9j}{5}\\
\frac{1+3j}{4}\cdot z &= \frac{5-5j+9j-2}{5}\\
z &= 6\frac{4(3+4j)}{5(1+3j)}\\
z &= \frac{4}{5}\cdot\frac{(3+4j)(1-3j)}{10}\\
z &= \frac{4}{5}\cdot\frac{15-5j}{10}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad z = \dfrac{2}{5}\cdot(3-j)$

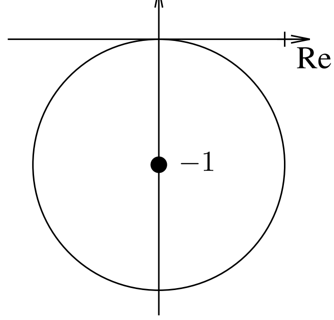
c) $Im\left\{\frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{x+jy} = \frac{x-jy}{x^2+y^2}\\
Im\{\tfrac{1}{z}\} &= \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$-2y = x^2 + y^2 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + y^2 + 2y + 1 = 1$

$\rightsquigarrow \quad x^2 + (y+1)^2 = 1$

Kreis um $(0|-1)$ mit Radius 1 ohne Nullpunkt



Aufgabe 8: Zerlege in Linearfaktoren

a) $P_3(z) = z^3 + 3z^2 + z$

$P_5(z) = z \cdot \underbrace{(z^2 + 3z + 1)}_{=0} \quad z_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$P_5(z) = z \cdot (z + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}) \cdot (z + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$

b) $P_5(z) = z^5 - 2z^4 + z - 2$

$z_1 = 2 \quad \rightsquigarrow \quad z^5 - 2z^4 + z - 2 : (z-2) = z^4 + 1 \quad z_{2,3,4,5} = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1e^{j\pi}} = 1 \cdot e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$

$z_{2,3,4,5} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}j$

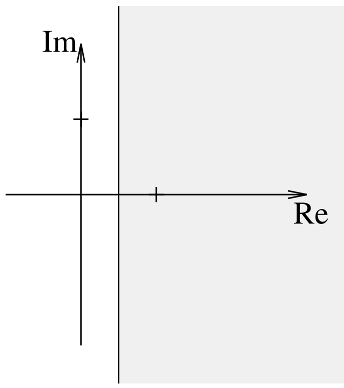
$$P_5(z) = (z-2) \cdot \underbrace{(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j) \cdot (z - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j)}_{z^2 - \sqrt{2}z + 1} \cdot \underbrace{(z + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j) \cdot (z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j)}_{z^2 + \sqrt{2}z + 1}$$

Aufgabe 9: Beschreiben Sie die Lage der Punkte z, für die gilt:

a) $Re\{z\} \geq \frac{1}{2}$

$z = x + jy \quad \rightsquigarrow \quad Re\{z\} = x \geq \frac{1}{2}$

Halbebene "rechts" der Geraden $x = \frac{1}{2}$



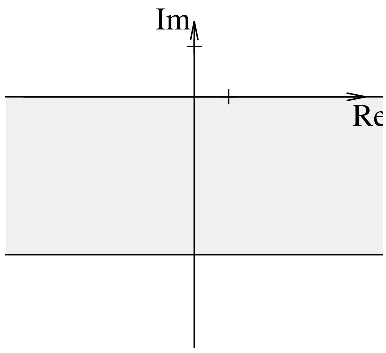
b) $0 \leq Re\{j \cdot z\} \leq 2\pi$

$z = x + jy \quad \rightsquigarrow \quad j \cdot z = -y + jx \quad \rightsquigarrow$

$Re\{j \cdot z\} = -y$

$0 \leq -y \leq 2\pi \quad \rightsquigarrow \quad -2\pi \leq y \leq 0$

Streifen zwischen der Geraden $y = -2\pi$ und der reellen Achse

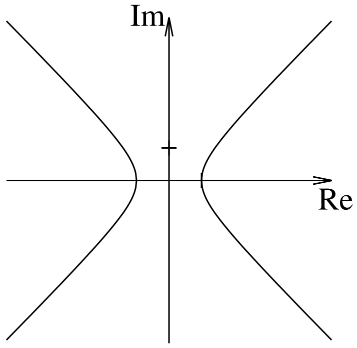


c) $Re\{z^2\} = 1$

$z = x + jy \quad \rightsquigarrow \quad z^2 = x^2 - y^2 + 2xyj \quad \rightsquigarrow$

$Re\{z^2\} = x^2 - y^2$

$x^2 - y^2 = 1$ ... Hyperbel um Ursprung mit Halbachsen $a = b = 1$



Aufgabe 1: Gegeben ist der komplexe Widerstand

$$Z(\omega) = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \text{ mit } Z_1 = R \ ; \ Z_2 = \tfrac{1}{j\omega C} \ ; Z_2 = j\omega L$$

a) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $Z(\omega)$

$$Z(\omega) = R + \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = R + \frac{L}{j\omega CL + \frac{1}{j\omega C}} = R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 CL}$$

$$Re\{Z(\omega)\} = R; \quad Im\{Z(\omega)\} = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 CL}$$

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 CL)^2}}$$

b) Wo liegen alle $Z(\omega)$ in der komplexen Zahlenebene ?

$$w = u + vj = R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 CL}; \quad u = R; \quad v = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 CL};$$

Alle $Z(\omega)$ liegen auf der Parallelen zur imaginären Achse durch R; Dabei werden alle Punkte durchlaufen:

$$v = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 CL} \quad \rightsquigarrow \quad v - \omega^2 CLv = \omega L$$

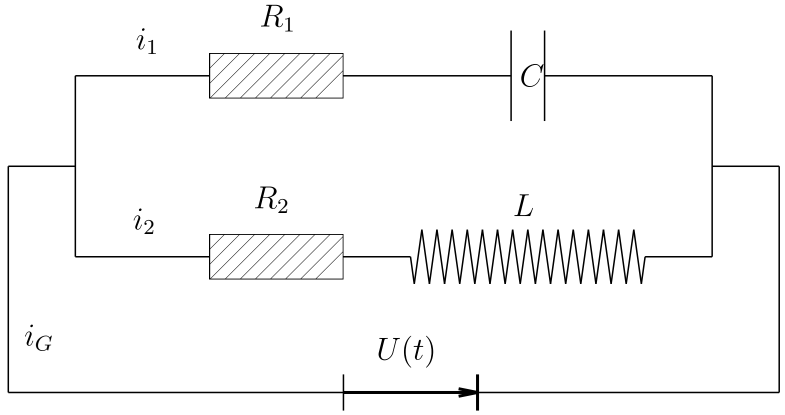
$$vCL\omega^2 + L\omega - v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4v^2 CL}}{2vCL}$$ besitzt für alle v Lösungen!

c) Für welches ω wächst $|Z(\omega)|$ über alle Grenzen ?

Wenn Nenner in $Z(\omega) = R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 CL}$ zu Null wird!

$$1 - \omega^2 CL = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

Aufgabe 2: Gegeben ist die folgende Schaltung



mit den Konstanten

R_1	R_2	C	L
50 Ω	20 Ω	200 μF	200mH

und der Spannung $U(t) = 200 \cos\left(\frac{100 \cdot t}{s}\right) V$.

Ermitteln Sie die Ströme i_1, i_2 durch die beiden Zweige sowie den Gesamtstrom i_G.

$$R_{i_1} = 50 \ [\frac{V}{A}] + \frac{1}{j100 \ [s^{-1}] \ 200 \cdot 10^{-6} \ [AsV^{-1}]} = 50 - 50j \ [\frac{V}{A}]$$

$$R_{i_2} = 20 \ [\frac{V}{A}] + j100 \ [s^{-1}] \ 200 \cdot 10^{-3} \ [VsA^{-1}] = 20 + 20j \ [\frac{V}{A}]$$

$$\frac{1}{R_G} = \frac{1}{R_{i_1}} + \frac{1}{R_{i_2}} = \frac{1}{50-50j} + \frac{1}{20+20j} = \frac{1+j}{100} + \frac{1-j}{40} = \frac{7-3j}{200} \quad \rightsquigarrow$$

$$R_G = \frac{200}{7-3j} = \frac{200(7+3j)}{58}$$

$$R = \frac{U}{i} \quad \rightsquigarrow$$

1. Zweig: $\quad 50 - 50j = \dfrac{U_0 e^{j\omega t}}{i_{1,0} e^{j(\omega t - \alpha_1)}} \quad \rightsquigarrow$

$$i_{1,0} = \frac{200}{|50-50j|} = 2\sqrt{2}; \qquad \tan\alpha_1 = \tfrac{-1}{1} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_1 = -\frac{\pi}{4}$$

2. Zweig: $\quad 20 + 20j = \dfrac{U_0 e^{j\omega t}}{i_{2,0} e^{j(\omega t - \alpha_2)}} \quad \rightsquigarrow$

$$i_{2,0} = \frac{200}{|20+20j|} = 5\sqrt{2}; \qquad \tan\alpha_2 = \tfrac{1}{1} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$$

Gesamtstrom: $\quad \dfrac{200}{58}(7+3j) = \dfrac{U_0 e^{j\omega t}}{i_{G,0} e^{j(\omega t - \alpha_G)}} \quad \rightsquigarrow$

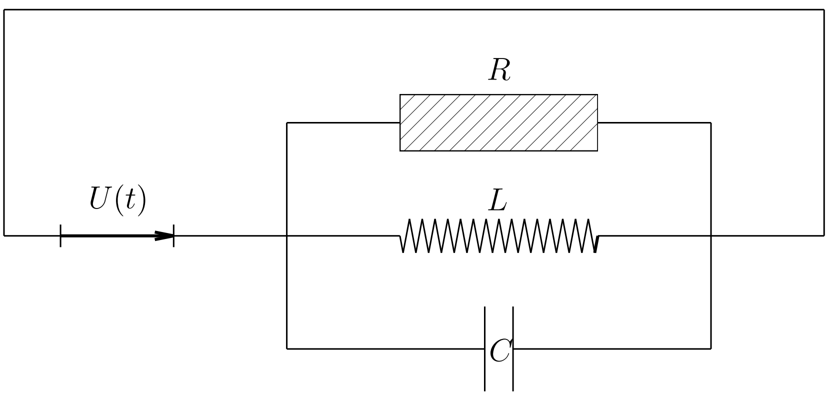
$$i_{g,0} = \frac{58}{|7+3j|} = \sqrt{58}; \qquad \tan\alpha_G = \tfrac{3}{7} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_G = 0.4048...$$

Gesamtstrom über Addition der Teilströme:

$$\begin{aligned} i_G = i_1 + i_2 \quad &= \quad 2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} + 5\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \\ &= \quad 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) + 5\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 7 + 3j \\ &= \quad \sqrt{58}e^{j\alpha_g} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \quad i_{G,0} = \sqrt{58} \qquad \tan\alpha_G = \tfrac{3}{7} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_G = 0.4048...$$

Aufgabe 3: Gegeben ist die folgende Schaltung



mit den Konstanten

R	C	L	ω
$50\ \Omega$	$400\ \mu F$	$500\ mH$	$50\ s^{-1}$

und der Spannung $\quad U(t) = 200\cos(\omega t)\ V$.

a) Berechnen Sie den Gesamtstrom i.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_\Omega} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_I} =$$

$$\frac{1}{50\ [VA^{-1}]} + \frac{1}{j\omega\ [s^{-1}]\ 500 \cdot 10^{-3}\ [VsA^{-1}]} + j\omega\ [s^{-1}]\ 400 \cdot 10^{-6}\ [AsV^{-1}]$$

$$= \tfrac{1}{50} + \frac{2}{j\omega} + j \cdot \frac{4\omega}{10^4} = \tfrac{1}{50} + j\left\{\frac{4\omega}{10^4} - \frac{2}{\omega}\right\}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{50} + j\left\{\frac{4\omega}{10^4} - \frac{2}{\omega}\right\}}$$

$$\omega = 50 \quad R = \frac{1}{\frac{1}{50} - j\frac{1}{50}} = 25(1+j)$$

Gesamtstrom: $\quad 25(1+j) = \dfrac{U_0 e^{j\omega t}}{i_{G,0} e^{j(\omega t - \alpha_G)}} \quad \rightsquigarrow$

$$i_{G,0} = \frac{200}{25|1+j|} = 4\sqrt{2}; \qquad \tan\alpha_G = \tfrac{1}{1} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_G = \tfrac{\pi}{4}$$

b) Für welche Frequenz ω wird die Stromstärke minimal ?

$i_{G,0}$ wird minimal, wenn $|R|$ maximal wird. Dies wird der Fall sein, wenn der von ω abhängige Imaginärteil des Nenners zu Null wird.

$$R = \frac{1}{\frac{1}{50} + j\left\{\frac{4\omega}{10^4} - \frac{2}{\omega}\right\}}$$

$$\left\{\frac{4\omega}{10^4} - \frac{2}{\omega}\right\} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega = 50\sqrt{2}$$