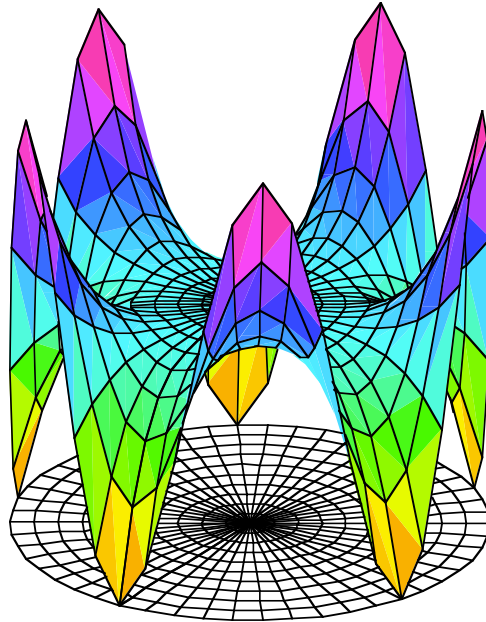


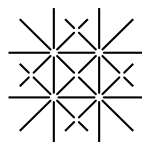
Hans Walser

Ergänzungen in Mathematik

Studierende Nanowissenschaften



Komplexe Zahlen



UNI
BASEL

Inhalt

1	Die imaginäre Einheit	1
2	Rechenregeln	1
3	Quadratische Gleichungen.....	2
3.1	Der harmlose Fall.....	2
3.2	Der Satz von Vieta.....	3
4	Der Fundamentalsatz von Gauß.....	4
5	Die komplexe Zahlenebene.....	5
6	Nochmals die Rechenoperationen.....	7
6.1	Addition und Subtraktion	7
6.2	Multiplikation.....	7
6.3	Potenzen und Wurzeln	10
6.3.1	Eine logarithmische Spirale	10
6.3.2	Einheitswurzeln	12
7	Quaternionen.....	14

2005 Provisorische Ausgabe

2006 MathType

last modified: 13. März 2006

Hans Walser

Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel

www.math.unibas.ch/~walser

hwals@bluewin.ch

1 Die imaginäre Einheit

Die komplexen Zahlen entstanden aus dem Bedürfnis, Wurzeln aus negativen Radikanden zu „ziehen“; etwa beim Lösen quadratischer Gleichungen.

Definition:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Die komplexen Zahlen sind also aus zwei reellen Zahlen zusammengesetzt. Dabei heißt x der Realteil von z und y der Imaginärteil von z . Schreibweisen: $\operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z)$. Der Imaginärteil ist aber auch eine reelle Zahl. Das i wurde von Euler als Abkürzung für „imaginäre Einheit“ eingeführt.



Leonhard Euler, 1707 - 1783

2 Rechenregeln

Addition und Subtraktion sind einfach.

Beispiele:

$$(3 + 2i) + (2 + 5i) = 5 + 7i$$

$$(-2 + 8i) - (3 - i) = -5 + 9i$$

Allgemein:

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + (y + v)i$$

$$(x + iy) - (u + iv) = (x - u) + (y - v)i$$

Auch die Multiplikation ist einfach.

Beispiel:

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(2 + 5i) &= 6 + 15i + 4i + 10i^2 \\ &= 6 + 15i + 4i - 10 = -4 + 19i\end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}(x + iy)(u + iv) &= xu + ixv + iyu + i^2yv \\ &= xu + ixv + iyu - yv = xu - yv + i(xv + yu)\end{aligned}$$

Für die Division brauchen wir einen Trick mit geeignetem Erweitern.

Beispiel:

$$\frac{3+2i}{4+3i} = \frac{3+2i}{4+3i} \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{18-i}{16+9} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$$

Allgemein:

$$\frac{x+yi}{u+vi} = \frac{x+yi}{u+vi} \frac{u-vi}{u-vi} = \frac{(xu+yv)+i(-xv+yu)}{u^2+v^2} = \frac{(xu+yv)}{u^2+v^2} + i \frac{(-xv+yu)}{u^2+v^2}$$

Wir machen die wichtige Feststellung, dass die Resultate bei diesen Rechenoperationen in jedem Fall wieder komplexe Zahlen sind. On reste en famille.

Das Vorgehen bei der Division gibt Anlass zu folgenden Definitionen:

Konjugation:

$$\begin{aligned}u - vi \text{ ist die zu } u + vi \text{ konjugiert komplexe Zahl} \\ \text{Schreibweise: } u - vi = \overline{u + vi}\end{aligned}$$

Beim Konjugieren wird beim Imaginärteil das Vorzeichen gewechselt.

Betrag oder absoluter Betrag:

$$|w| = |u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2} \text{ ist der Betrag der komplexen Zahl } w = u + iv$$

Der offensichtliche Zusammenhang des Betrages mit der Formel von Pythagoras wird in der geometrischen Darstellung in der komplexen Zahlenebene deutlich.

3 Quadratische Gleichungen

3.1 Der harmlose Fall

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Lösung mit der Formel:

Lösung mit Linearfaktoren:

3.2 Der Satz von Vieta



François Viète, 1540 – 1603

Eine Gleichung von der Form $x^2 + bx + c = 0$ habe die Lösungen x_1 und x_2 . Wegen

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

folgt der Satz von Vieta:

In einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a = 1$ gilt:

$$b = -(x_1 + x_2)$$

$$c = x_1 x_2$$

Gilt das nun auch, wenn komplexe Lösungen auftreten?

Beispiel: $x^2 - 4x + 13 = 0$

Die Diskriminante ist nun negativ: $D = 16 - 52 = -36 < 0$

Somit ist $\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6i$

Für die Lösungen nach der üblichen Formel erhalten wir:

$$x_1 = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{4-6i}{2} = 2 - 3i$$

Die beiden Lösungen sind konjugiert komplex. Tatsächlich gilt:

$$b = -(x_1 + x_2) = -4$$

$$c = x_1 x_2 = 13$$

Der imaginäre Anteil fällt bei beiden Rechnungen heraus.

Wir sehen in diesem Beispiel eine Anwendung des Begriffs der Konjugation:

$$w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w)$$

$$w \bar{w} = |w|^2$$

4 Der Fundamentalsatz von Gauß

Eine quadratische Gleichung hat offenbar folgendes Lösungsverhalten:

- Zwei verschiedene reelle Lösungen
- Eine reelle Doppellösung (Vielfachheit 2)
- Zwei konjugiert komplexe Lösungen

Dabei setzen wir voraus, dass die in der Gleichung vorkommenden Koeffizienten a , b , c selber reell sind.

Dies lässt sich verallgemeinern:

Eine Gleichung vom Grade n mit reellen Koeffizienten hat insgesamt genau n Lösungen. Diese können reell (mit Vielfachheiten) sein oder paarweise konjugiert komplex.

Dieser Satz wurde von Gauß in seiner Dissertation bewiesen. Er wird oft als *Fundamentalsatz der Algebra* bezeichnet.

Ist n ungerade, gibt es also immer mindestens eine reelle Lösung, da die konjugierten Lösungen immer paarweise auftreten.

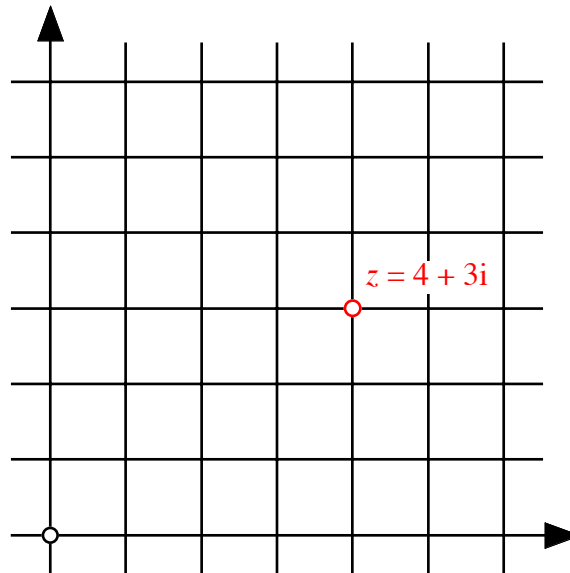


Carl Friedrich Gauß, 1777 - 1855

5 Die komplexe Zahlenebene

Die Idee ist, Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl als x -Koordinate beziehungsweise y -Koordinate eines kartesischen Koordinatensystems zu interpretieren. So kann jeder komplexen Zahl ein Punkt in der zweidimensionalen komplexen Zahlenebene zugeordnet werden. Dies ist eine natürliche Verallgemeinerung der reellen Zahlengeraden.

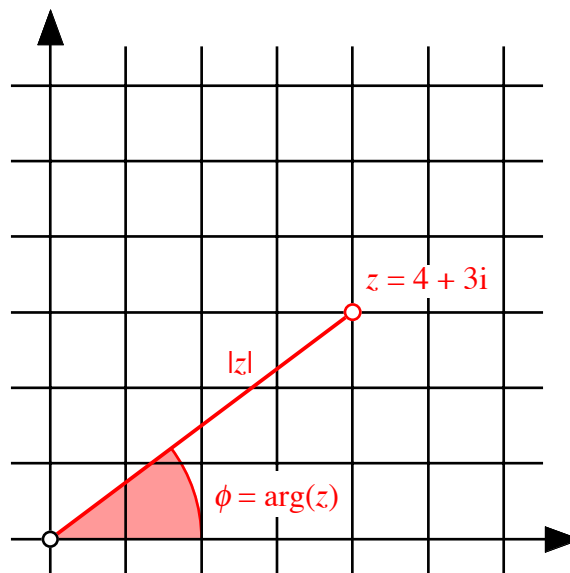
Die komplexe Ebene geht auf Gauß zurück und wird deshalb oft als *Gaußsche Ebene* bezeichnet.



Die komplexe Zahlenebene

Damit haben wir einen Link zur Geometrie.

Die Polarkoordinaten einer komplexen Zahl sind der schon bekannte Betrag der komplexen Zahl sowie das Argument der komplexen Zahl.



Argument und Betrag

Es gelten die Formeln:

$$\tan(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$$
$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Bei der konkreten Berechnung des Argumentes $\phi = \arg(z)$ ist zu beachten, dass die arctan-Funktion auf einer tan-Funktion mit eingeschränktem Definitionsbereich basiert.

Umgekehrt gilt:

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\phi)$$

$$\operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\phi)$$

Somit ist:

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = |z|(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$

Mit der Erinnerung an die Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

gilt also:

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = |z|(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) = |z|e^{i\phi}$$

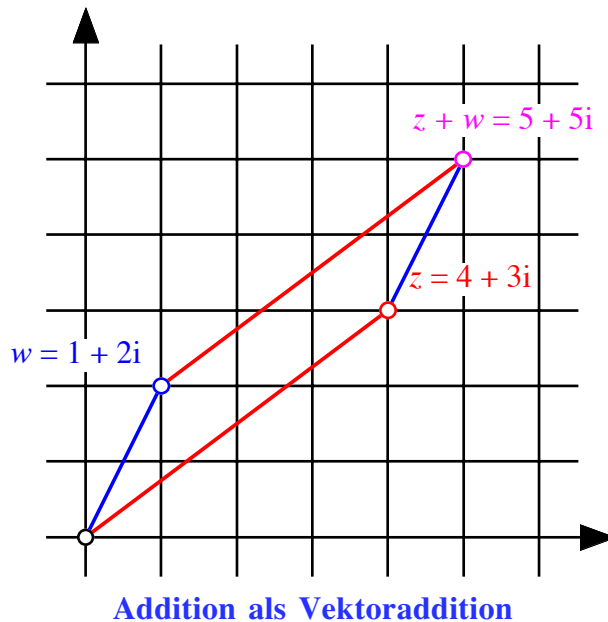
$$z = |z|e^{i\phi}$$

Insbesondere ist $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ eine komplexe Zahl mit dem Argument ϕ und dem Betrag 1, liegt also auf dem Einheitskreis.

6 Nochmals die Rechenoperationen

6.1 Addition und Subtraktion

Die Addition kann als Vektoraddition interpretiert werden, entsprechend die Subtraktion als Vektorsubtraktion.



6.2 Multiplikation

Für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen z und w verwenden wir die Schreibweisen $z = |z|e^{i\phi}$ und $w = |w|e^{i\psi}$. Es ist dann

$$zw = |z|e^{i\phi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i(\phi+\psi)}$$

Andererseits ist $zw = |zw|e^{i\arg(zw)}$. Durch Vergleich folgt:

Der Betrag des Produktes ist gleich dem Produkt der Beträge der Faktoren.

Das Argument des Produktes ist gleich der *Summe* der Argumente der Faktoren.

$$|zw| = |z||w|$$

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

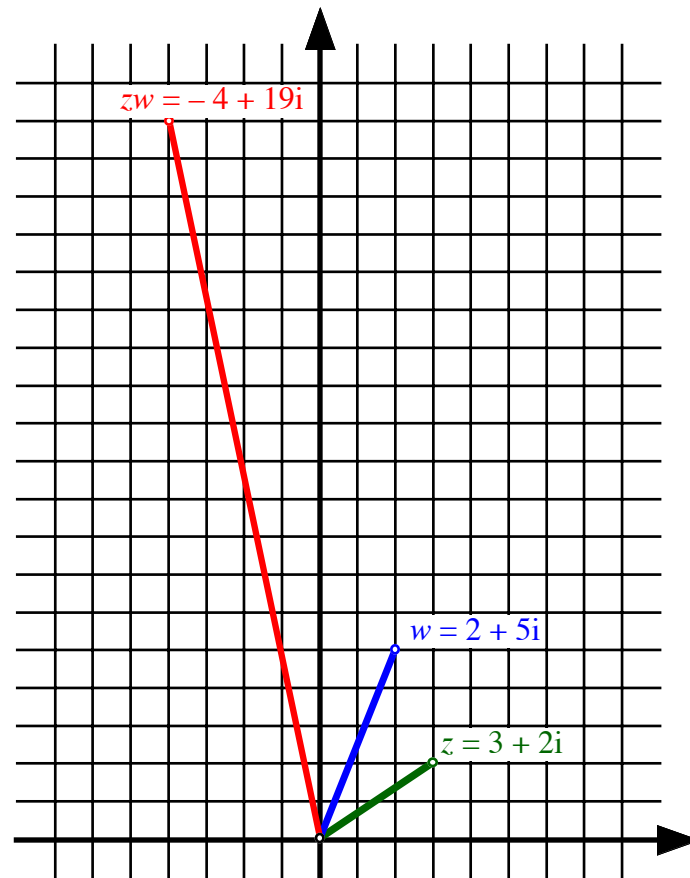
Entsprechendes gilt für die Division:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$$

Die Regeln für das Argument entsprechen den Regeln für den Logarithmus.

Beispiel:



Multiplikation

Aus $z = 3 + 2i$ und $w = 2 + 5i$ ergibt sich $zw = -4 + 19i$. Es ist:

$$|z| = \sqrt{13}, \quad |w| = \sqrt{29} \quad \text{und} \quad |zw| = \sqrt{377} = \sqrt{13}\sqrt{29}$$

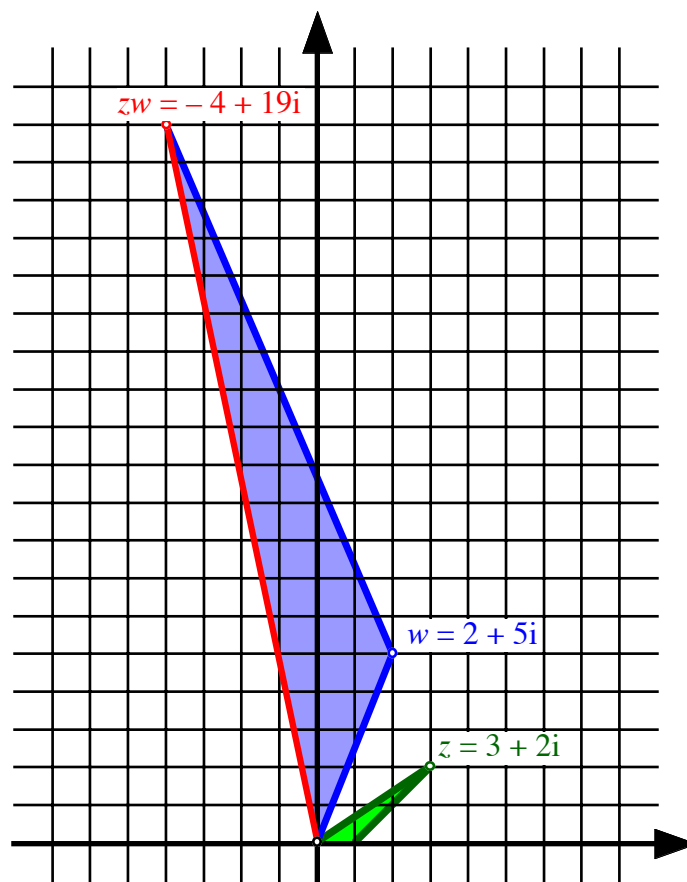
$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.588 \approx 33.69^\circ$$

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1.190 \approx 68.20^\circ$$

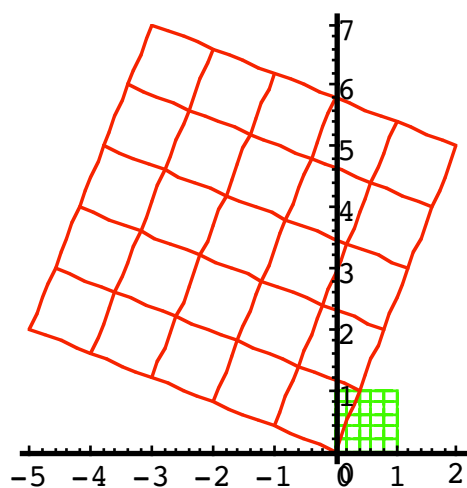
und

$$\arg(zw) = \arctan\left(\frac{19}{-4}\right) + \pi \approx 1.778 \approx 101.89^\circ$$

Die Multiplikation mit $w = 2 + 5i$ kann als Drehstreckung mit dem Drehwinkel $\arg(w) \approx 68.20^\circ$ und dem Faktor $|w| = \sqrt{29} \approx 5.385$ interpretiert werden.



Drehstreckung mit $w = 2 + 5i$



Drehstreckung mit $w = 2 + 5i$

6.3 Potenzen und Wurzeln

Das Potenzieren kann als mehrfaches Multiplizieren gesehen werden. Daher ist:

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z)$$

Entsprechend gilt für das Wurzelziehen:

$$|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$$

$$\arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{1}{n} \arg(z)$$

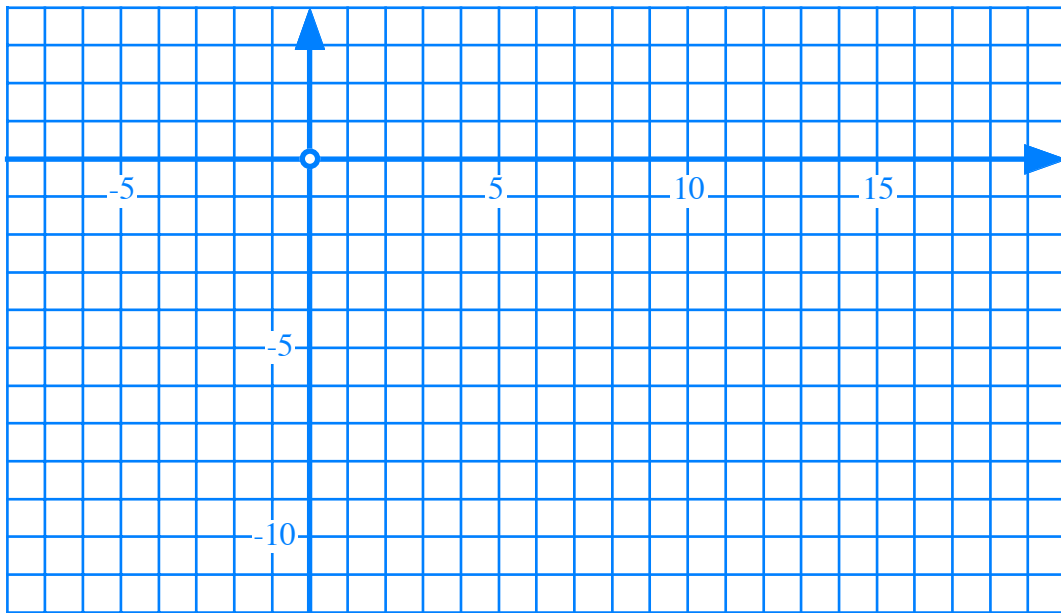
6.3.1 Eine logarithmische Spirale

Es sei $z_n = (1+i)^n$, $n \in \{0,1,2,\dots\}$.

Tabelle:

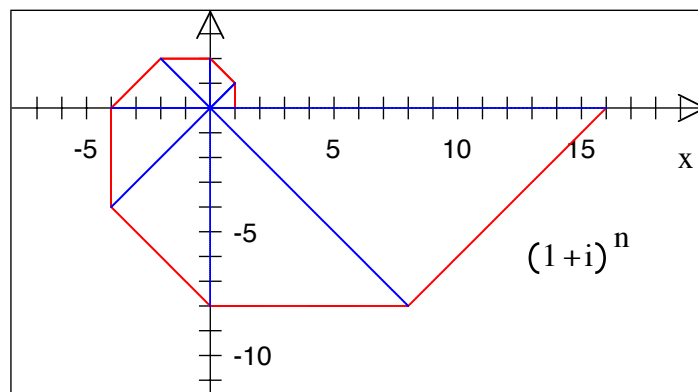
n	$z_n = (1+i)^n$	$ z_n $	$\arg(z_n)$
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

In der komplexen Ebene:



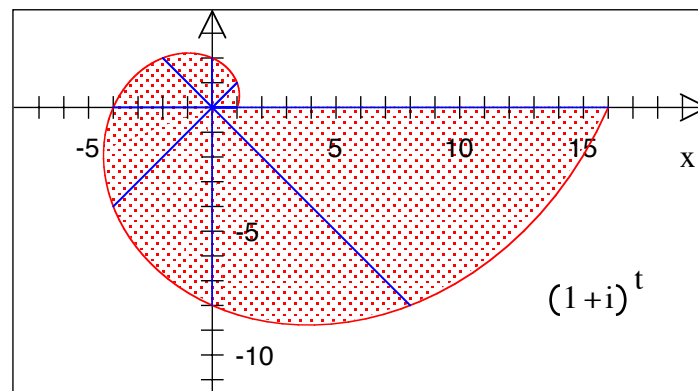
In der komplexen Ebene

Es entsteht eine eckige Schnecke.



Eckige Schnecke

Wenn wir von $z_n = (1+i)^n$ übergehen auf $z(t) = (1+i)^t$, ergibt sich eine logarithmische Spirale.



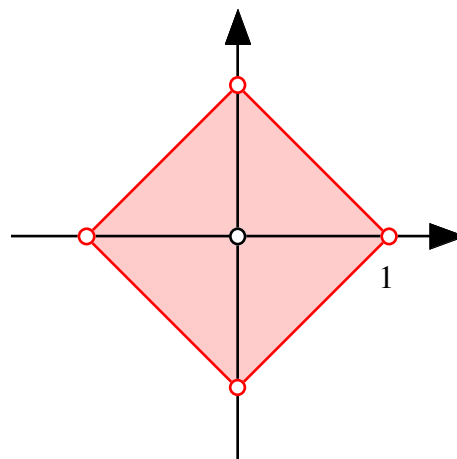
Logarithmische Spirale

6.3.2 Einheitswurzeln

Im Reellen hat die Gleichung $z^n = 1$ oder $z^n - 1 = 0$ nur die Lösungen ± 1 für gerades n und sogar nur die Lösung 1 für ungerades n . Im Komplexen wird es spannender und gleichzeitig systematischer. Wir wissen ja aus dem Fundamentalsatz, dass es n Lösungen geben muss.

Für $z^2 - 1 = 0$ haben wir die Lösungen $\{1, -1\}$.

Für $z^4 - 1 = 0$ finden wir mit etwas Fantasie die Lösungen $\{1, i, -1, -i\}$. Diese vier Lösungen bilden in der komplexen Zahlenebene ein Quadrat, das auf einer Spitze steht.



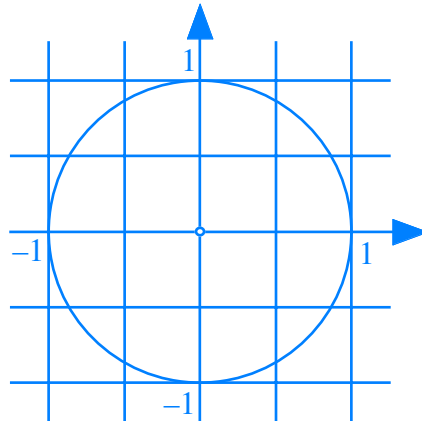
Lösungsmenge

Die Gleichung $z^3 - 1 = 0$ hat die reelle Lösung 1. Durch Herausdividieren des entsprechenden Linearfaktors erhalten wir:

Es ist also $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$. Für weitere Lösungen der Gleichung $z^3 - 1 = 0$ müssen wir die Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$ bearbeiten. Diese hat, da die Diskriminante $D = -3$ ist, keine reellen Lösungen, hingegen die beiden konjugiert komplexen Lösungen $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Die Gleichung $z^3 - 1 = 0$ hat also die drei Lösungen:

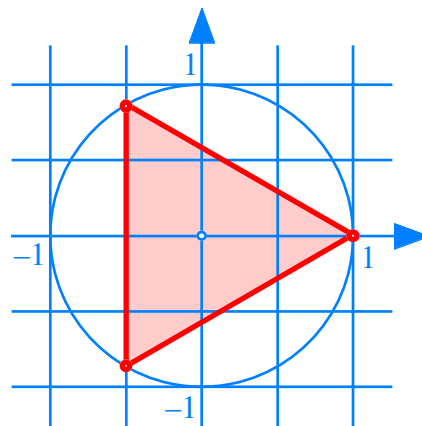
$$\left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Wo liegen diese Lösungen in der komplexen Zahlenebene?



Lösungsmenge

Alle drei Lösungen haben den Betrag 1, liegen also auf dem Einheitskreis. Die Argumente sind $\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$. Die Punkte bilden also ein gleichseitiges Dreieck.



Lösungsmenge

Aus diesen Beispielen ersehen wir einen allgemeinen Sachverhalt:

Die n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind:

$$z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right), \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Wir können das durch Einsetzen verifizieren:

$$z_k^n = \left(e^{ik\frac{2\pi}{n}} \right)^n = e^{i2k\pi} = \left(e^{i2\pi} \right)^k = 1^k = 1$$

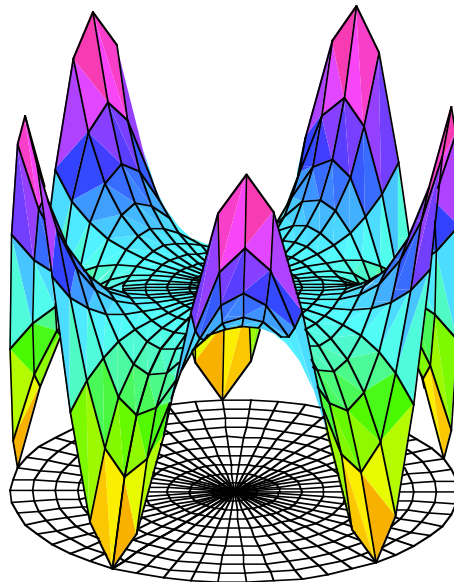
Bemerkungen:

- Diese Lösungen werden im Jargon als *n-te Einheitswurzeln* bezeichnet.
- Sie sind die Ecken eines regelmäßigen *n*-Eckes mit dem Einheitskreis als Umkreis.
- Die Nummerierung kann von $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ laufen oder oft auch $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.
- Eine Ecke, nämlich z_n beziehungsweise z_0 ist die Zahl 1.
- Die *x*-Achse ist eine Symmetrieachse des regelmäßigen *n*-Eckes.

Das folgende Bild stellt die reellwertige Funktion zweier Variablen

$$f(x, y) = \left| \operatorname{Re} \left((x + iy)^5 - 1 \right) \right|$$

dar.



Fünfteilige Drehsymmetrie

Die fünften Einheitswurzeln sind Nullstellen dieser Funktion. Es sind allerdings nicht die einzigen Nullstellen, da der Realteil von $z^5 - 1$ auch anderswo Null sein kann. Die anderen (unendlich vielen) Nullstellen haben aber einen Betrag größer als 1 und sind daher auf dem Bild nicht sichtbar.

7 Quaternionen

Die komplexen Zahlen leisten, geometrisch gesehen, eine Erweiterung der eindimensionalen reellen Zahlengeraden auf die zweidimensionale komplexe Zahlenebene. Es liegt daher nahe, nach einer weiteren Erweiterung in den dreidimensionalen Raum zu suchen. Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) hat jahrelang nach einer solchen Erweiterung gesucht, bis er schließlich einsehen musste, dass dies prinzipiell nicht möglich ist. Hingegen fand er (am 16. Oktober 1843) die so genannten Quaternionen, welche im vierdimensionalen Raum spielen.



William Rowan Hamilton, 1805 – 1865

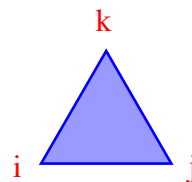
Quaternionen sind Zahlen von der Form $z = a + bi + cj + dk$ mit reellen Koeffizienten a, b, c, d und den Bedingungen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j$$

Wir sehen bei den gemischten Produkten, dass die Multiplikation der Quaternionen *nicht* kommutativ ist.

Die Formeln für die gemischten Produkte lassen sich mit folgendem Schema merken:



Merkschema

Bei positivem Umlauf ergeben zwei aufeinander folgende Zahlen die dritte, bei negativem Umlauf das Negative der dritten.

Leider erwies es sich, dass die Quaternionen nicht die enorme Bedeutung erlangten wie die komplexen Zahlen. Dasselbe gilt auch für die 1843 von J. T. Graves und unabhängig von ihm 1845 von Arthur Cayley konstruierten Oktaven, bei welchen die Multiplikation nicht einmal mehr assoziativ ist (das heißt es kann $(pq)r \neq p(qr)$ sein).