Das Horner sche Schema

Benannt nach William George Horner (1786 - 1837)
Er veröffentlichte das Schema 1819, anscheinend ohne zu wissen, dass er auf eine für eintausend Jahre chinesischer Mathematik typische Methode gestoßen ist.

Was leistet das Horner-Schema?

1) Funktionswerte berechnen

Bsp.: $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$= \{ [(a_4 \cdot x + a_3) \cdot x + a_2] \cdot x + a_1 \} \cdot x + a_0$$

Schematische Darstellung:

$$\begin{array}{cccccc} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ + & & a_4 \cdot x & A_3 \cdot x & A_2 \cdot x & A_1 \cdot x \\ \hline & a_4 & A_3 & A_2 & A_1 & f(x) \end{array}$$

$A_3 = (a_4 \cdot x + a_3)$

$A_2 = [(a_4 \cdot x + a_3) \cdot x + a_2]$

$A_1 = \{ [(a_4 \cdot x + a_3) \cdot x + a_2] \cdot x + a_1 \}$

Bsp.: $f(x) = -3x^3 + 4x + 16$

ges.: $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$

$$\begin{array}{ccccc} & -3 & 0 & 4 & 16 \\ + & \boxed{x=1} & -3 & -3 & 1 \\ \hline & -3 & -3 & 1 & 17 = f(1) \end{array}$$

$\cdot x \nearrow$ $\quad \downarrow +$

$$\begin{array}{ccccc} & -3 & 0 & 4 & 16 \\ + & \boxed{x=2} & -6 & -12 & -16 \\ \hline & -3 & -6 & -8 & 0 = f(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & -3 & 0 & 4 & 16 \\ + & \boxed{x=3} & -9 & -27 & -69 \\ \hline & -3 & -9 & -23 & -53 = f(3) \end{array}$$

2) Ersetzt die Polynomdivision, wenn der Divisor ein Linearterm ist

Bsp.: $(-3x^3+4x+16):(x-1) = -3x^2-3x+1+\frac{17}{x-1}$

$$\begin{array}{l}
-(-3x^3+3x^2) \\
\hline
\quad -3x^2+4x \\
\quad -(-3x^2+3x) \\
\hline
\qquad\quad x+16 \\
\qquad -(x-1) \\
\hline
\qquad\qquad 17
\end{array}$$

<u>Vergleich:</u>

$$\begin{array}{cccccc}
 & & -3 & 0 & 4 & 16 \\
+ & & \boxed{x=1} & -3 & -3 & 1 \\
\hline
 & & -3 & -3 & 1 & 17
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & -3 & 0 & 4 & 16 \\
+ & \boxed{x=2} & -6 & -12 & -16 \\
\hline
 & -3 & -6 & -8 & 0
\end{array}$$

Also:

$(-3x^3+4x+16):(x-2) = -3x^2-6x-8$

$$\begin{array}{ccccc}
 & -3 & 0 & 4 & 16 \\
+ & \boxed{x=3} & -9 & -27 & -69 \\
\hline
 & -3 & -9 & -23 & -53
\end{array}$$

Also:

$(-3x^3+4x+16):(x-3) = -3x^2-9x-23-\frac{53}{x-3}$

3) Berechnet die Werte der Ableitung

Bsp.:

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

$$= a_4x^3 + (a_4\cdot x + a_3)x^2 + [(a_4x+a_3)x+a_2]x + \{[(a_4x+a_3)x+a_2]x+a_1\}$$

$$= a_4x^3 + A_3x^2 + A_2x + A_1$$

A_1, A_2 und A_3 wurden bei 1) berechnet.

Schematische Darstellung:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
+ & & a_4 x & A_3 x & A_2 x & A_1 x \\
\hline
 & a_4 & A_3 & A_2 & A_1 & f(x) \\
+ & & a_4 x & B_3 x & B_2 x & \\
\hline
 & a_4 & B_3 & B_2 & B_1 = f'(x) &
\end{array}
$$

Bsp.: $f(x) = -3x^3 + 4x + 16$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & -3 & 0 & 4 & 16 \\
+ & \boxed{x=1} & -3 & -3 & 1 \\
\hline
 & -3 & -3 & 1 & 17 = f(1) \\
+ & \boxed{x=1} & -3 & -6 & \\
\hline
 & -3 & -6 & -5 = f'(1) &
\end{array}
$$

Vergleich: $f'(x) = -9x^2 + 4 \qquad f'(1) = -5$

4) Es kommt noch besser:

Bsp.: $f(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 5$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 3 & 4 & -2 & 3 & -7 & 5 \\
+ & \boxed{x=1} & 3 & 7 & 5 & 8 & 1 \\
\hline
 & 3 & 7 & 5 & 8 & 1 & \underline{\underline{6 = f(1)}} \\
+ & \boxed{x=1} & 3 & 10 & 15 & 23 & \\
\hline
 & 3 & 10 & 15 & 23 & \underline{\underline{24 = f'(1)}} & \\
+ & \boxed{x=1} & 3 & 13 & 28 & & \\
\hline
 & 3 & 13 & 28 & 51 = \underline{\frac{1}{2} f''(1)} & & \\
+ & \boxed{x=1} & 3 & 16 & & & \\
\hline
 & 3 & 16 & \underline{\underline{44 = \frac{1}{3!} \cdot f'''(1)}} & & & \\
+ & \boxed{x=1} & 3 & & & & \\
\hline
 & 3 & 19 = \frac{1}{4!} \cdot f^{(IV)}(1) & & & &
\end{array}
$$

$\nwarrow \frac{1}{5!} f^{(V)}(1)$

Also: $f''(1) = 102$

$f'''(1) = 6 \cdot 44$

$f^{(IV)}(1) = 24 \cdot 19$

$f^{(V)}(1) = 120 \cdot 3$

Bsp.: $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 4$

$\underline{x=-2}$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & 2 & -3 & 5 & 1 & -4 \\
+ & \boxed{x=-2} & -4 & 14 & -38 & 74 \\
\hline
 & 2 & -7 & 19 & -37 & \boxed{70 = f(-2)} \\
+ & \boxed{x=-2} & -4 & 22 & -82 & \\
\hline
 & 2 & -11 & 41 & \boxed{-119 = f'(-2)} & \\
+ & \boxed{x=-2} & -4 & 30 & & \\
\hline
 & 2 & -15 & \boxed{71 = \frac{1}{2!} f''(-2)} & & \\
+ & \boxed{x=-2} & -4 & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{-19 = \frac{1}{3!} f'''(-2)} & & & \\
\end{array}
$$

$\frac{1}{4!} f^{(IV)}(-2)$

Dieses Schema heißt erweitertes Horner-Schema.

Also:

$$f(x) = \Big\{\Big[\big(2\cdot(x+2) - 19\big)(x+2) + 71\Big]\cdot(x+2) - 119\Big\}(x+2) + 70$$

$$= 2(x+2)^4 - 19\cdot(x+2)^3 + 71\cdot(x+2)^2 - 119(x+2) + 70$$

$$= \frac{1}{4!} f^{(IV)}(-2)\cdot(x+2)^4 + \frac{1}{3!} f'''(-2)\cdot(x+2)^3 + \frac{1}{2!} f''(-2)\cdot(x+2)^2 + f'(-2)(x+2) + f(-2)$$

Das ist eine Entwicklung nach $(x+2)$ Potenzen