H.Schäffler

## 6.3 Harmonische Funktionen

### 6.3.1 Harmonische Funktionen mit der Periode p = 2π

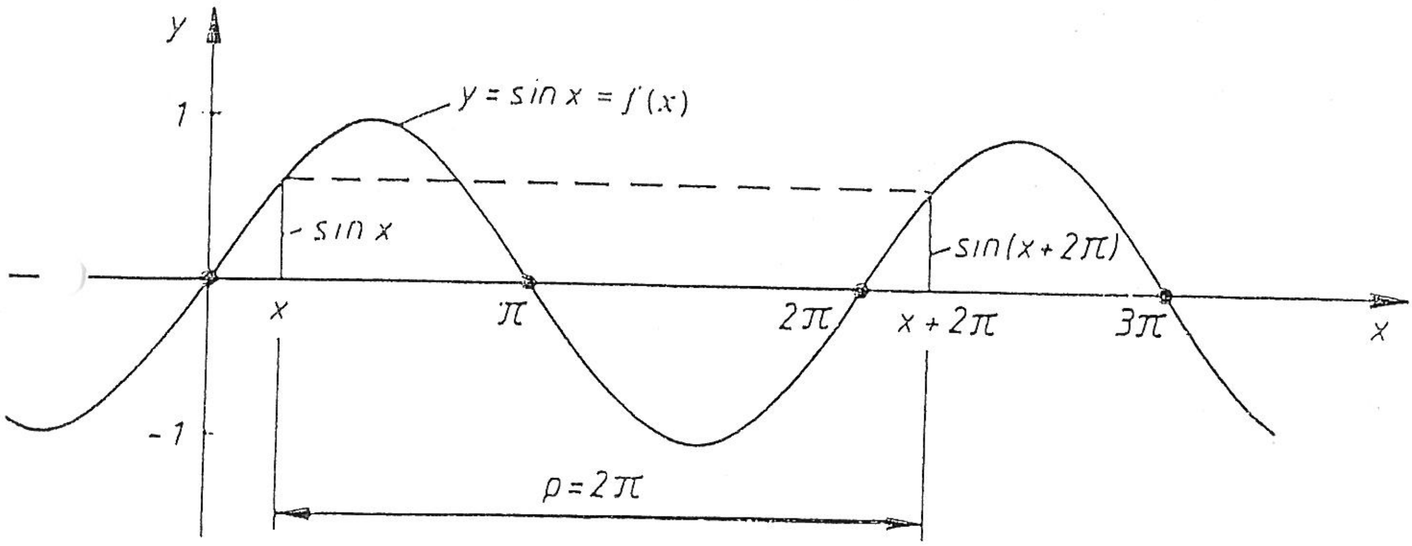
Unter harmonischen Funktionen versteht man Sinusfunktionen und Cosinusfunktionen der folgenden Art:

$$f(x) = a \cdot \cos(x + \varphi)$$
$$f(x) = b \cdot \sin(x + \varphi)$$
$$f(x) = a \cdot \cos(x + \varphi) + b \cdot \sin(x + \varphi)$$

In allen 3 Beispielen gilt

$$\boxed{f(x) = f(x + 2\pi) \text{ für alle } x \in R} \qquad (1)$$

Dabei ist $2\pi$ der kleinste Wert, Periode genannt, für welche die obige Periodizitätsbedingung gilt.




Die Sinusfunktion $y = \sin x$ als Beispiel für eine periodische Funktion :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Aus Gleichung (1) und der Skizze folgt weiter:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = f(x + k\,2\pi) \quad \text{für } x \in R \\ \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \Leftrightarrow k \in Z \end{array}} \qquad (2)$$

## 6.3.2 Harmonische Funktionen mit der beliebigen Periode P > 0

$$f(x) = a \cdot \cos(\omega x + \varphi)$$
$$f(x) = b \cdot \sin(\omega x + \varphi)$$
$$f(x) = a \cdot \cos(\omega x + \varphi) + b \cdot \sin(\omega x + \varphi)$$

Obwohl die Periode p dieser Funktionen zunächst noch nicht bekannt ist, so muss doch die Forderung der Periodizität gelten:

$$f(x) = f(x+p) \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty$$

Also muss z.B. gelten:

$$a\cos(\omega x + \varphi) = a\cos\{\omega(x+p) + \varphi\}$$
$$\cos(\omega x + \varphi) = \cos\{(\omega x + \varphi) + \omega p\}$$

Setzt man $\omega x + \varphi = z$ so folgt weiter

$$\cos z = \cos(z + \omega p)$$

Wegen $\cos z = \cos(z + 2\pi)$ folgt:

$$\boxed{\omega\, p = 2\pi} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{p = \frac{2\pi}{\omega}}$$

<u>**Beispiel 1:**</u> Die Periode von $f(x) = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ hat wegen $\omega = 4$ den Wert $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Das lässt sich leicht bestätigen:

$$2\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left\{4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{6}\right\}=2\cos\left\{\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+2\pi\right\}$$
$$=2\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$$

**Beispiel 2:** Wie muss $\omega$ in der Funktion $f(x)=-5\sin(\omega x+\varphi)$ gewählt werden, damit f(x) die Periode p = 2 hat?

$$\omega=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

**Beispiel 3:** $f(t)=2\mathrm{cm}\cos\left(6s^{-1}t+\frac{\pi}{2}\right)$

Mit $\omega$ = Kreisfrequenz = $6s^{-1}s$ folgt

$p=T=\dfrac{2\pi}{6s^{-1}}=\dfrac{\pi}{3}s$ und weiter Frequenz

$$f=\frac{1}{T}=\left(\frac{3}{\pi}\right)s^{-1}=\frac{3}{\pi}\text{Hertz}=\frac{3}{\pi}\text{Hz}$$

Allgemein gilt:

| | |
|---|---|
| $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi f$ | $T=\dfrac{1}{f}=$ **Schwingungsdauer** |

**f = Frequenz = Anzahl der Schwingungen (der Zeitdauer T) in einer Sekunde**

**Beispiel 4:**

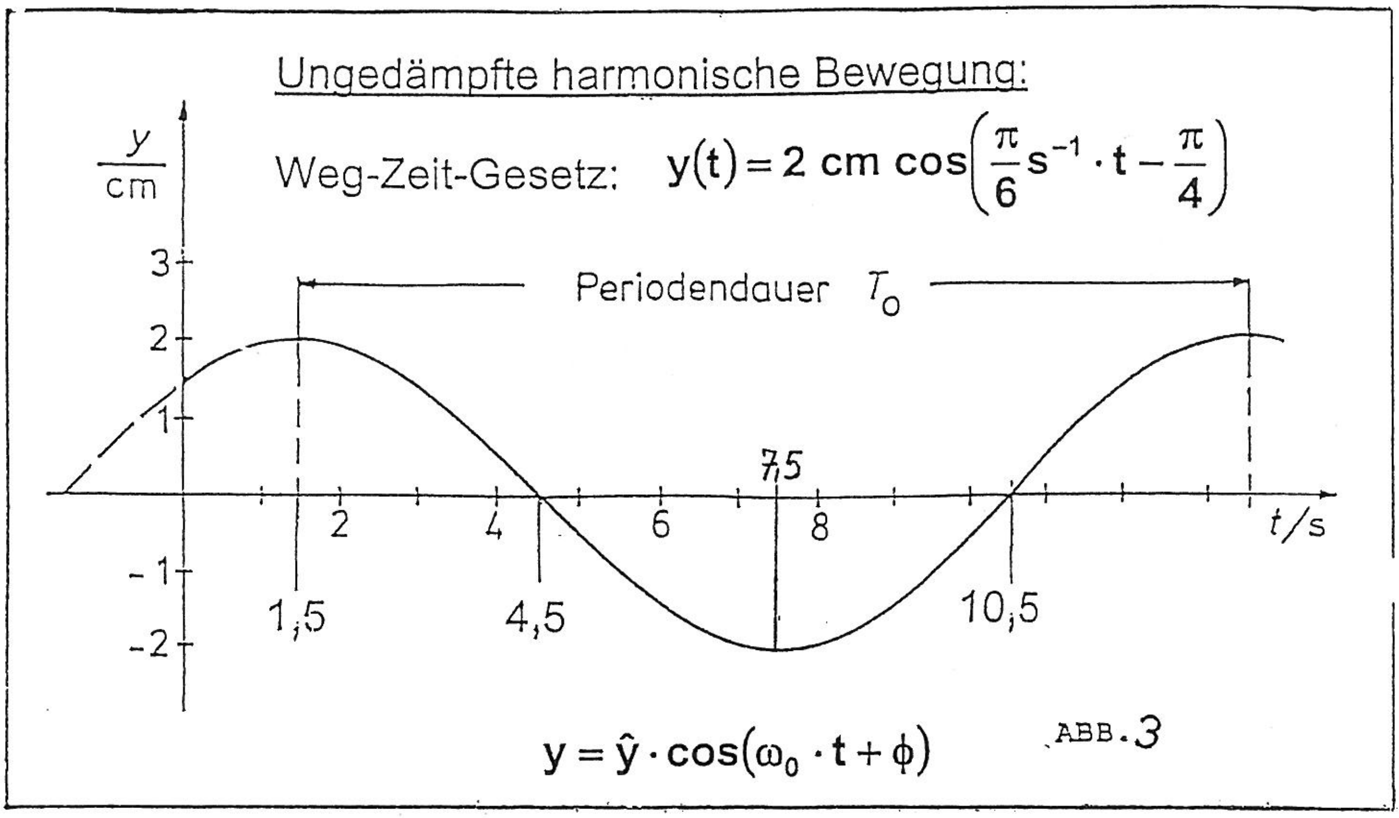


ABB. 3

Periode $T_0 = 12\ \mathrm{s}$; Amplitude $\hat{y} = 2\ \mathrm{cm}$

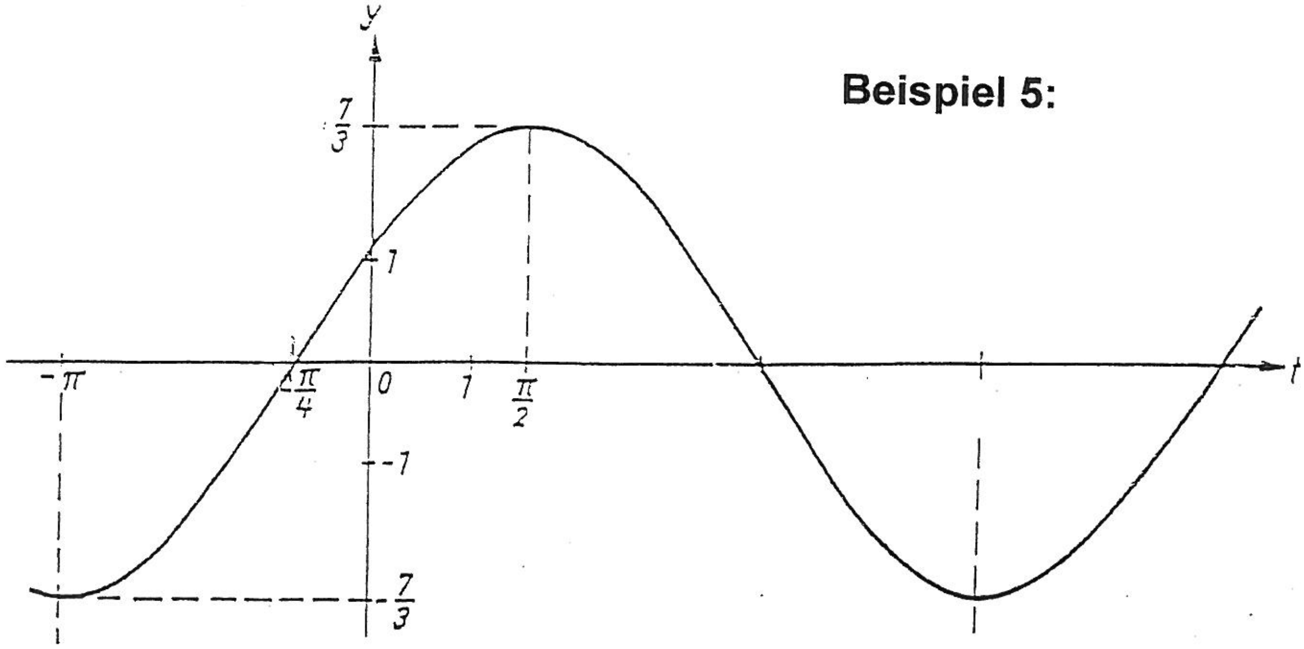
Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{6}\mathrm{s}^{-1}$ ; $t_0 = 1{,}5\ \mathrm{s}$

Nullphasenwinkel $\phi = -\frac{2\pi}{T_0} t_0 = -\frac{\pi}{4}$

Man muss also die Bildkurve von $f(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ auf der t-Achse nach rechts $(t_0 > 0)$ um 1.5 Zeiteinheiten verschieben, um die Bildkurve von $y(t)$ zu erhalten.

$$y(t) = 2\ \mathrm{cm}\ \cos\left\{\frac{\pi}{6}\mathrm{s}^{-1}\left(t - \frac{3\,\mathrm{s}}{2}\right)\right\}$$

**Beispiel 5:**




Die dargestellte Bildkurve läßt sich beschreiben durch

a) $y(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$

b) $y(t) = A \cos(\omega t + \psi)$

Bestimmen Sie Amplitude $A>0$ , Periode T, Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$, sowie die Nullphasenwinkel $\Phi$ und $\psi$.

### 6.3.3 Bestimmung von Hochpunkten, Tiefpunkten und Nullstellen der allgemeinen Sinusfunktion $f(x)=\sin(ax+b)$ bzw. der allgemeinen Kosinusfunktion $f(x)=\cos(ax+b)$

a) $\boxed{y=f(x)=\sin(ax+b)}$

1) **Periode** $\boxed{P=\frac{2\pi}{a}}$ mit $\boxed{\begin{array}{l} f(x+k\cdot P)=f(x) \\ k=0;\pm 1;\pm 2 \end{array}}$

2) **Hochpunkte**, falls $\sin(ax+b)=1 \Rightarrow (ax+b)=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{r} x_k=\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\frac{1}{a}+k\left(\frac{2\pi}{a}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\frac{1}{a}+k\cdot P \\ k=0;\pm 1;\pm 2;\ldots \end{array}}$$

**Für den Abstand $x_{k+1}-x_k=d$ zweier aufeinander folgender Hochpunkte erhält man $d=P=\frac{2\pi}{a}$**

3) **Tiefpunkte**, falls $\sin(ax+b)=-1 \Rightarrow ax+b=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi \Rightarrow$

$$\boxed{x_{k2}=\left(\frac{3\pi}{2}-b\right)\frac{1}{a}+k\underbrace{\left(\frac{2\pi}{a}\right)}_{P}=\left(\frac{3\pi}{2}-b\right)\frac{1}{a}+k\cdot P}$$

oder mit $ax + b = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x_k = \left(\frac{-\pi}{2} - b\right)\frac{1}{a} + k\underbrace{\left(\frac{2\pi}{a}\right)}_{P} = \left(-\frac{\pi}{2} - b\right)\frac{1}{a} + k \cdot P}}$$

$$\boxed{\mathbf{k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots}}$$

**Für den Abstand $x_{k+1} - x_k = d$ zweier aufeinander folgender Tiefpunkte erhält man $d = P = \frac{2\pi}{a}$**

4) **Nullstellen**, falls $\sin(ax + b) = 0 \Rightarrow$

$$(ax + b) = k\pi \Rightarrow \boxed{\mathbf{x_k = -\frac{b}{a} + k \cdot \frac{\pi}{a} = -\frac{b}{a} + k \cdot \frac{P}{2}}}$$

Für den Abstand d zweier aufeinander folgender Nullstellen erhält man $\mathbf{d = x_{k+1} - x_k = \left\{-\frac{b}{a} + (k+1)\frac{P}{2} - \left(-\frac{b}{a} + k\frac{P}{2}\right)\right\} = \frac{P}{2} = \frac{\pi}{a}}$

**Beispiel 6**:

Für $\boxed{\mathbf{f(x) = -3\,sin(2x - \pi)}}$ sind alle Hochpunkte gesucht, d.h.

$$-3\sin(2x-\pi) = \quad \Rightarrow \sin(2x-\pi) = \quad \Rightarrow$$

$$(2x-\pi) = \qquad\qquad x_k =$$

$$\boxed{\mathbf{x_k = \frac{5\pi}{4} + k\cdot\pi = \frac{5\pi}{4} + k\cdot P}} \text{ mit } \boxed{\mathbf{P = \frac{2\pi}{2} = \pi}}$$

oder

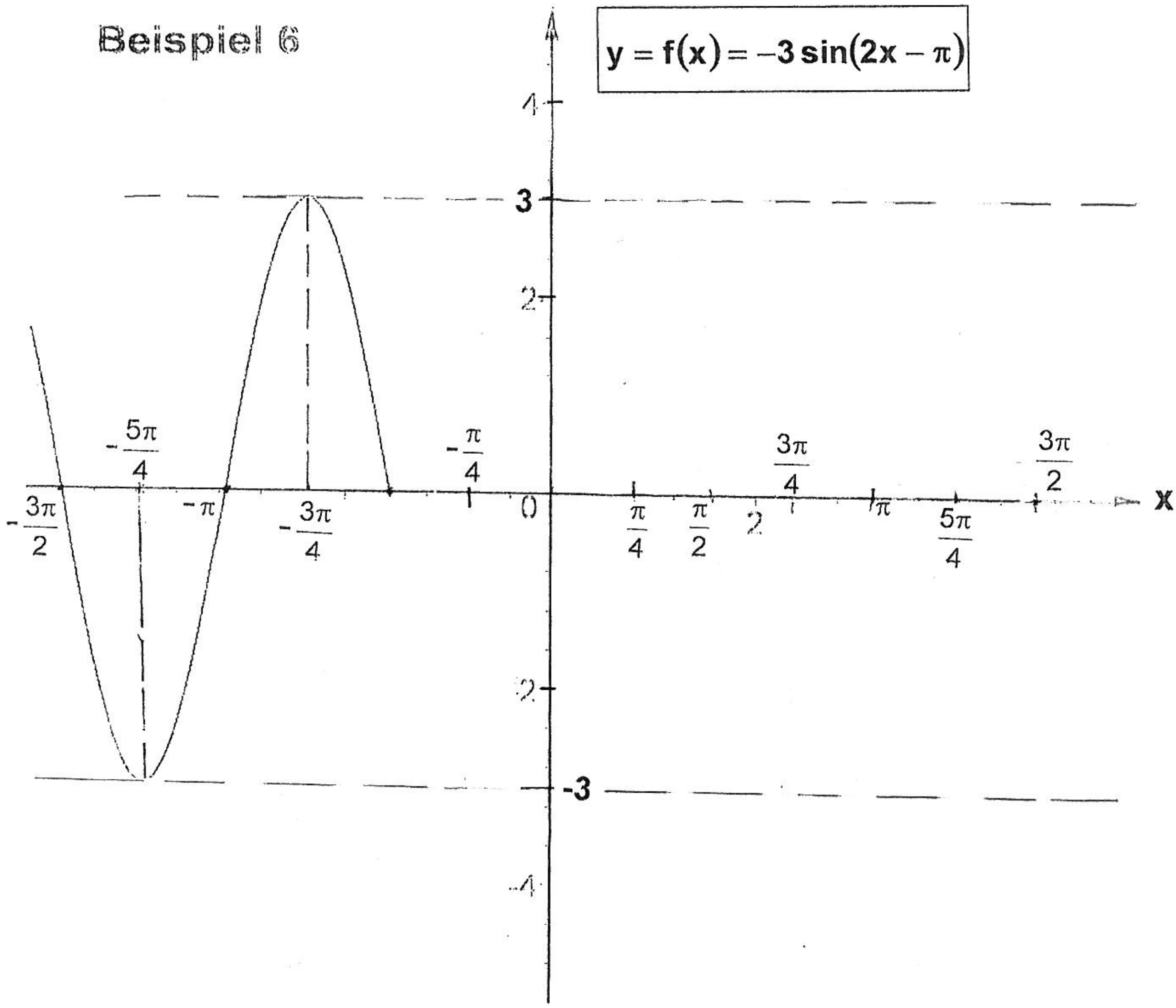
$$(2x-\pi) = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \Rightarrow x_k = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2} + k\cdot\pi$$

$$\boxed{\mathbf{x_k = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi = \frac{\pi}{4} + k\cdot P}} \quad \textbf{mit } \boxed{\mathbf{k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}}$$

**Einfachere Lösung**:

$$f(x) = -3\sin(2x-\pi) = +3\sin(2x) \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$$

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$$




```
plot(-3*sin(2*x-Pi),x=-5..5,y=-5..5,
thickness=2,numpoints=20000,color=black,scaling=constrained);
```

b) $\boxed{y = f(x) = \cos(ax + b)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P = \frac{2\pi}{a} = \text{Periode}}$

**Hochpunkte**: $\cos(ax + b) = 1 \Rightarrow ax + b = k \cdot 2\pi$

$$\boxed{x_k = -\frac{b}{a} + k\left(\frac{2\pi}{a}\right) = -\frac{b}{a} + k \cdot P} \qquad \boxed{k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots}$$

**Tiefpunkte**: $\cos(ax + b) = -1 \Rightarrow (ax + b) = \pi + k \cdot 2\pi$

$$\boxed{x_k = \frac{(\pi - b)}{a} + k\frac{2\pi}{a} = \left(\frac{\pi - b}{a}\right) + k \cdot P} \qquad \boxed{k \in Z}$$

**Wiederum gilt für den Abstand d zweier aufeinander folgender Hochpunkte bzw. Tiefpunkte** $d = P = \frac{2\pi}{a}$

**Nullstellen**: $\cos(ax + b) = 0 \Rightarrow (ax + b) = \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$

$$\boxed{x_k = \left(\frac{\pi}{2} - b\right)\frac{1}{a} + k \cdot \frac{\pi}{a} = \left(\frac{\pi}{2} - b\right)\frac{1}{a} + k \cdot \frac{P}{2} \qquad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots}$$

**Ebenso gilt für den Abstand zweier aufeinander folgender Nullstellen:** $d = x_{k+1} - x_k = \frac{P}{2} = \frac{\pi}{a}$

**Beispiel 7:**

$$\boxed{x(t) = 2\cos\left(2t - \frac{5\pi}{6}\right)} \Rightarrow \boxed{P = \frac{2\pi}{2} = \pi}$$

**Hochpunkte:** $\left(2t - \frac{5\pi}{6}\right) =$ $\Rightarrow$ $t_k =$

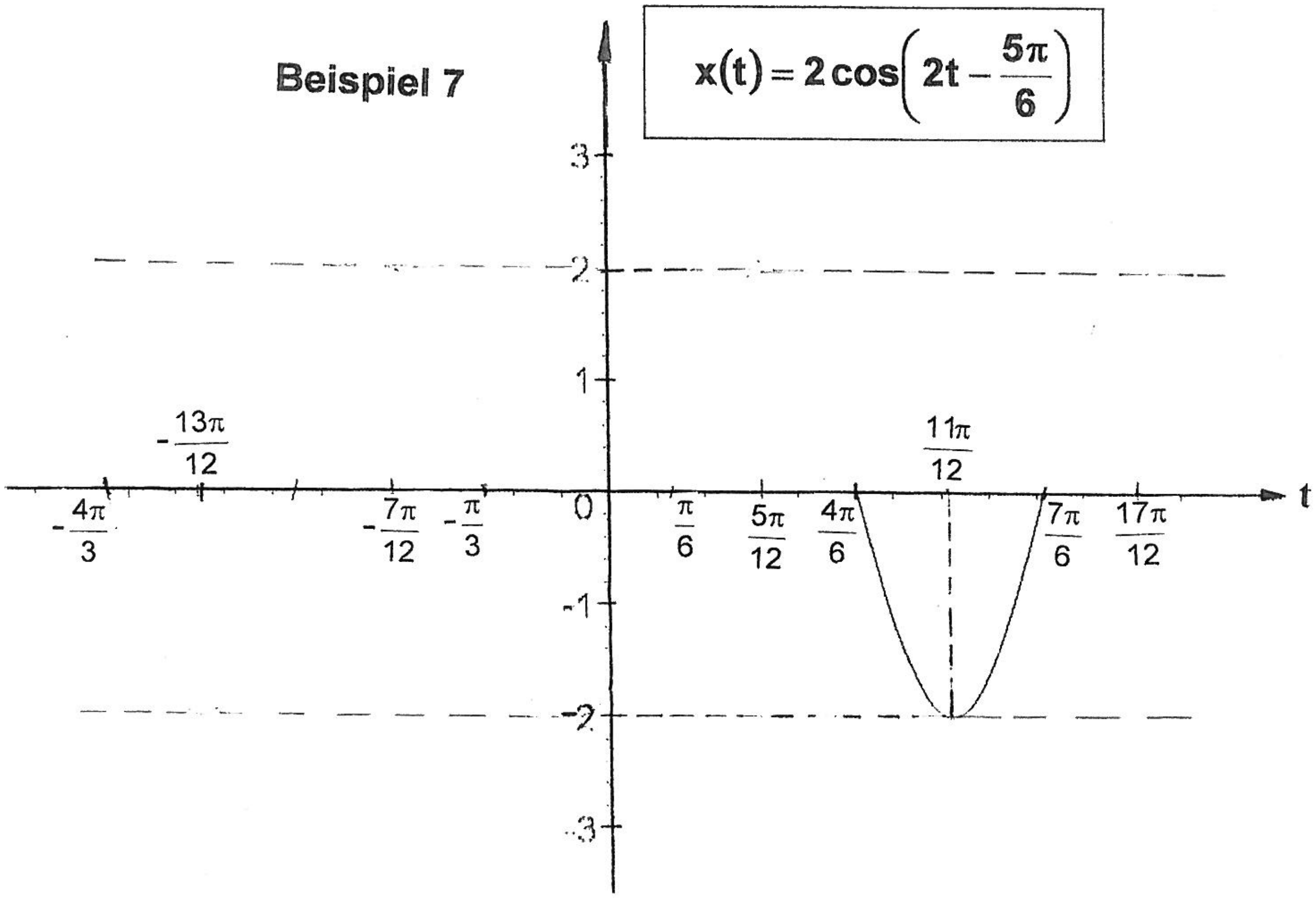
$$\boxed{t_k = \frac{5\pi}{12} + k \cdot P} \qquad \boxed{k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots}$$

**Tiefpunkte:** $\left(2t - \frac{5\pi}{6}\right) =$ $\Rightarrow$ $t_k =$

$$\boxed{t_k = \frac{11\pi}{12} + k \cdot \pi = \frac{11\pi}{12} + k \cdot P} \qquad \boxed{k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots}$$

**Nullstellen:** $\left(2t - \frac{5\pi}{6}\right) =$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c} t_k = \left(\frac{2\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right) \\ k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \end{array}}$$




```
plot(2*cos(2*x-5*Pi/6),x=-7..7,y=-3..3,
thickness=2,numpoints=20000,color=black,scaling=constrained);
```