Mathematik 3 – MB – Übungsblatt 6

*****LÖSUNGSVORSCHLÄGE*****

Themen:

Vektoranalysis – Weitere Übungen

Aufgabe A1:

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der folgenden Ortsvektoren:

a) $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(2u) \\ 2\cdot\sin(2u) \\ v^2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{r}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot(\lambda^2-\mu^2) \\ \lambda\mu \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungen:

a) Wir leiten einfach partiell in jeder Komponente ab:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -4\cdot\sin(2u) \\ 4\cdot\cos(2u) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}.$$

b) Gleiche Vorgehensweise wie in Teil a):

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial\vec{r}}{\partial\mu} = \begin{pmatrix} -\mu \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

P.S. Hier kommen nur im ersten Teil höhere Ableitungsregeln vor, nämlich die Kettenregel bei trigonometrischen Funktionen. Ansonsten findet sich keine der „schwereren“ Regeln, da Parameter ja wie Konstanten behandelt werden.

Aufgabe A2:

Gegeben ist eine Rotationsfläche mit der Parameterdarstellung $x = u$, $y = v$ und $z = \sqrt{u^2+v^2+4}$. Bestimmen Sie im Flächenpunkt P, der zu den Parameterwerten $u = 1$ und $v = -2$ gehört, die folgenden Größen:

a) Die Tangentenvektoren $\vec{t}_u$ und $\vec{t}_v$,

b) die Flächennormale $\vec{N}$,

c) die Tangentialebene.

Lösungen:

Zuerst stellen wir den Ortsvektor der Rotationsfläche auf: $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2+v^2+4} \end{pmatrix}$.

a) Hiermit ermitteln wir die beiden Tangentenvektoren, wobei wir nur bei der dritten Komponente die Kettenregeln benötigen.

$$\vec{t}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+4}} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{t}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+4}} \end{pmatrix}$$

Setzen wir die Zahlenwerte ein, so ergeben sich:

$$\vec{t}_u(1,-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{t}_v(1,-2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b) Die Flächennormale ist nun einfach das normierte Kreuzprodukt der beiden Tangentenvektoren. Durch das bekannte Schema (siehe z.B. Lösungen zu ÜB05) erhalten wir allgemein

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2u^2+2v^2+4}} \cdot \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ \sqrt{u^2+v^2+4} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir die gegebenen Werte ein, so ergibt sich

$$\vec{N}(1,-2) = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Aus b) folgt sofort die Gleichung für die Tangentialebene, wobei wir die blöde $\sqrt{14}$ beim Streckfaktor weglassen können und einfach den Punkt $P(1/-2/z(1,-2))$ für den noch offenen Wert e auf der rechten Seite einsetzen:

$$E: -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = e \xrightarrow{P(1/-2/3)} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

Aufgabe A3:

Zeigen Sie: Das skalare Vektorfeld $\phi = \ln r$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ besitzt den Gradienten $\operatorname{grad}\phi = \frac{1}{r^2} \cdot \vec{r}$.

Lösung:

Wir formen erst ein wenig um:

$$\phi = \ln r = \ln \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Auf Grund der Symmetrie genügt es, nach einer der Koordinaten abzuleiten, die anderen Ableitungen erhält man dann durch vertauschen der Variablen:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}_{\text{außen}}\cdot\underbrace{2x}_{\text{innen}}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x}{r^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{y}{r^2}\text{ und }\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{z}{r^2}$$

Damit können wir den Gradienten aufstellen: $\operatorname{grad}\phi=\vec{\nabla}\phi=\frac{1}{r^2}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{r^2}\cdot\vec{r}$.

Aufgabe A4:

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $\phi(x,y,z)=xyz+3xz^3$ in Richtung des Vektors $\vec{a}=(1\quad -2\quad 2)^T$ im Raumpunkt $P(1/2/1)$.

Lösung:

Zuerst einmal berechnen wir den Gradienten: $\vec{\nabla}\phi=\begin{pmatrix}yz+3z^3\\xz\\xy+9xz^2\end{pmatrix}\Rightarrow\operatorname{grad}\phi(P)=\begin{pmatrix}5\\1\\11\end{pmatrix}$. Nun

bestimmen wir den **Einheitsvektor in die gewollte Richtung**: $\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$. Nun

können wir die gesuchte Ableitung bilden:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\vec{a}}\right)_P=(\operatorname{grad}\phi)_P\bullet\vec{e}_{\vec{a}}=\begin{pmatrix}5\\1\\11\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}=\frac{25}{3}.$$

Aufgabe A5:

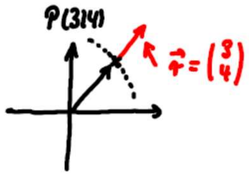
Berechnen Sie die Richtungsableitung von $\phi(x,y)=x^2-y^2$ im Punkt $P(3/4)$ in radialer Richtung.

Lösung:

Wieder benötigen wir zuerst den Gradienten:

$$\phi=x^2-y^2\Rightarrow\operatorname{grad}\phi=\begin{pmatrix}2x\\-2y\end{pmatrix}\Rightarrow(\operatorname{grad}\phi)_P=\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir wieder eine Richtungsableitung bilden, wobei wir in radialer Richtung ableiten wollen, d.h. in Richtung des Ortsvektors (siehe Skizze).



Skizze: Radiale Richtung

Die Richtung ist $\vec{e}_{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Damit berechnen wir die Richtungsableitung:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}}\right)_P = (\text{grad}\,\phi)_P \bullet \vec{e}_{\vec{r}} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{14}{5}.$$

Aufgabe A6:

Bestimmen Sie die Divergenz des Gradienten der skalaren Funktion $\phi(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-5)^2 + z^2$.

Lösung:

Wir berechnen zuerst der Gradienten: $\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} 2 \cdot (x-1) \\ 2 \cdot (y-5) \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich die Divergenz: $\text{div}\,\vec{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} = 2 + 2 + 2 = 6$.

Aufgabe A7:

Bestimmen Sie die Rotation der folgenden Vektorfelder:

a) $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy - z^2 \\ 2xyz \\ x^2 z - y^2 z \end{pmatrix}$

Lösungen:

Wir verwenden hier einfach die **Formel aus dem Skript**, wobei wir links $z = 0$ erweitern. Es ergibt sich:

a) $\text{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ #

b) $\text{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} -2y \cdot (x+z) \\ -2z \cdot (1+x) \\ 2yz - x \end{pmatrix}$

Aufgabe A8:

Wo verschwindet die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y-4y \end{pmatrix}$?

Lösung:

Wir haben die Gleichung $\operatorname{div}\vec{F}=0$. Also berechnen wir erst einmal die Divergenz:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}=y^2+x^2-4=0 \Rightarrow x^2+y^2=4$$ (das ist ein Kreis mit Radius 2).

Damit haben wir das Problem bereits gelöst.

Aufgabe A9:

Zeigen Sie, dass das räumliche Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2xz+y^2 \\ 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

wirbelfrei ist und deswegen als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(x,y,z)$ dargestellt werden kann. Bestimmen Sie dieses sog. Potentialfeld.

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Rotation mit der Formel aus dem Skript:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{pmatrix} 0-0 \\ 2x-2x \\ 2y-2y \end{pmatrix}=\vec{0}$$

Damit wissen wir, dass $\vec{F}=\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$ ist. Damit haben wir folgende drei Gleichungen:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xz+y^2 \xrightarrow{\int dx} \phi(x,y,z)=\underline{x^2z}+\underline{y^2x}+C_1(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=2xy \xrightarrow{\int dy} \phi(x,y,z)=\underline{xy^2}+C_2(x,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=x^2 \xrightarrow{\int dz} \phi(x,y,z)=\underline{x^2z}+C_3(x,y)$$

Vergleichen wir die drei Ergebnisse, so erhalten wir $\phi(x,y,z)=\underline{x^2z}+\underline{xy^2}+C$. Dabei muss jeder Term einmal vorkommen. Eine Konstante bleibt am Ende übrig, die von keiner der Variablen mehr abhängt.