DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart

Themen:

Mehrfachintegrale – Hier zumeist Dreifach-integrale

Aufgabe A1:

Berechnen Sie

$$I = \int_{\varphi=\pi}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{r^2} rz \cdot \sin(\varphi)\, dz\, dr\, d\varphi .$$

Aufgabe A2:

Welches Volumen V besitzt ein Körper, der durch Drehung der Kurve $z = 1 + \cos x$ mit $0 \le x \le \pi$ um die z-Achse entsteht?

Aufgabe A3:

Die durch den Kreis $x^2 + z^2 = 2$ und die Parabel $z = x^2$ begrenzte Fläche erzeugt bei der Rotation um die z-Achse einen Rotationskörper, dessen Volumen V zu bestimmen ist.

Aufgabe A4:

Skizzieren Sie das im 1. Quadranten gelegene Flächenstück, das durch die Kurven $z = 0{,}75x^2$, $z = 0{,}5x^2 + 1$ und $x = 0$ berandet wird. Welches Rotationsvolumen V entsteht bei der Drehung dieser Fläche um die z-Achse.

Aufgabe A5:

Auf einem L-förmig eingezäunten Stück Wiese ist an der linken oberen Ecke eine Ziege mit einer Leine der Länge ρ („roh“) angebunden. Die Bezeichnungen für die Maße der Wiese finden Sie in Abbildung 1. Für die Länge der Leine soll gelten, dass diese mindestens weiter als bis zur Ecke P geht und maximal so lang ist, wie die kürzere der beiden Kanten a oder f. Mathematisch formulieren wir das wie folgt (versuchen Sie diese Ungleichungskette nachzuvollziehen!):

$$\sqrt{e^2 + b^2} < \rho < \min\{a, f\}$$

Welche Fläche kann die Ziege damit also abgrasen?

Tipp:

Berechnen Sie zuerst, welche Fläche im Rechteck mit den Kanten e und f abgegrast werden kann. Berechnen Sie das dann auch für das Rechteck mit den Kanten a und b. Überlegen Sie sich anschließend, wie diese beiden Rechtecke kombiniert werden können.

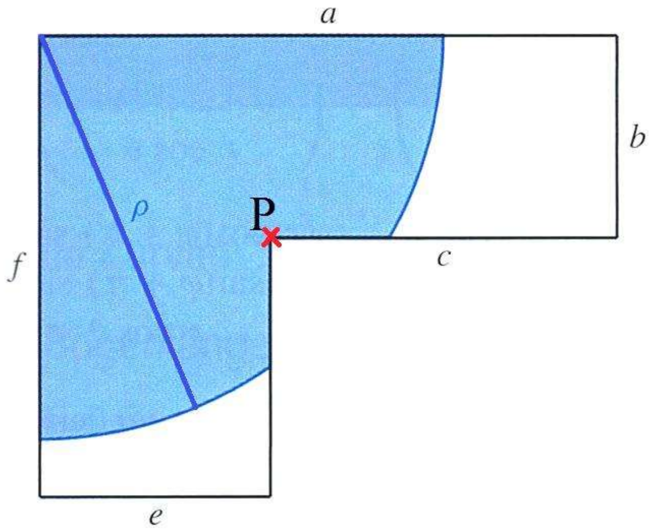

Abbildung 1: Das von der Ziege abgegraste Gebiet.

Aufgabe A6:

Die Gesamtmasse eines Körpers K erhält man, indem man seine Dichte ρ über das Volumen integriert, d.h.

$$M = \iiint_K \rho dV \, .$$

Mit diesem Wissen berechne man die Masse eines geraden Zylinders mit Radius R und Höhe $2R$, dessen Dichte von der Symmetrieachse nach außen linear von 0 auf 1 zunimmt. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a) Überlegen Sie sich, dass die Dichte unabhängig von der Höhe und dem Winkel immer $\rho(r) = \frac{r}{R}$ sein muss, wenn man Polarkoordinaten verwendet und begründen Sie diese Funktionsgleichung.

b) Stellen Sie das Integral in Polarkoordinaten auf, wobei Sie den Korrekturterm aus der Vorlesung nicht vergessen sollten. Berechnen Sie den Wert des Integrals im Anschluss.

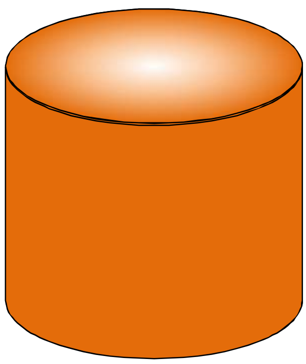

Abbildung 2: Zum Dichteverlauf in dem in Aufgabe A6 beschriebenen Zylinder.

Aufgabe A7:

Was ändert sich an Aufgabe A6, wenn die Dichte von der Symmetrieachse nach außen linear von 1 auf 0 abnimmt. Welcher der beiden Zylinder (der hier oder aus Aufgabe A6) ist massereicher?

Aufgabe A8:

Hinweis I:

Verwenden Sie Kugelkoordinaten

$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta$, $y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta$ und $z = r \cdot \cos\vartheta$

Hinweis II:

Wenn Sie nach Kugelkoordinaten transformieren, muss die Integrandfunktion zusätzlich zur Ersetzung der Variablen nach den Formeln in Hinweis I mit $r^2 \cdot \sin\vartheta$ multipliziert werden. Es ist $dr d\varphi d\vartheta$ die Reihenfolge beim Integrieren.

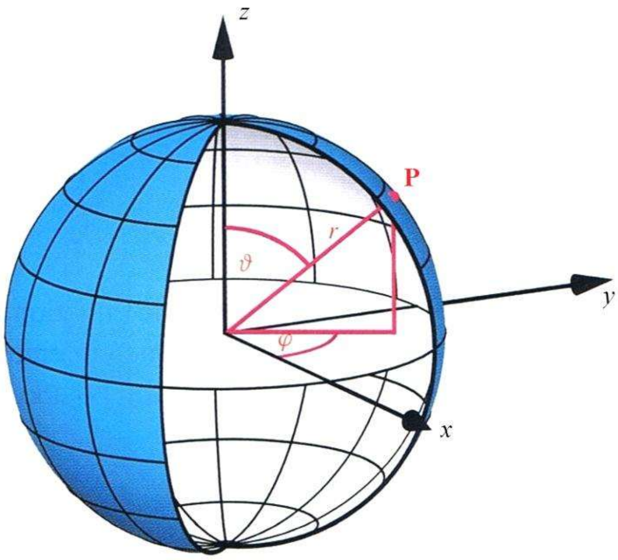

Abbildung 3: Kugelkoordinaten im Bilde.

a) Berechnen Sie die Masse einer Kugel K mit dem Radius R und der mit dem Abstand zum Mittelpunkt linear von 0 auf 1 zunehmenden Dichte ρ. Überlegen Sie sich, dass in Kugelkoordinaten $\rho = \frac{r}{R}$ gilt (analog zu Aufgabe A6).

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment J_z dieser Kugel bezüglich der z-Achse durch den Kugelmittelpunkt (Formel S. 37 im Skript, ρ darf hier nicht herausgezogen werden (**Warum?**)!).