Themen:
Funktionsuntersuchungen, Extrema mit und ohne Nebenbedingungen

---

Aufgabe A1:

Gegeben ist die Funktion $F(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-2\cdot\left(x^2-y^2\right)=0$ in impliziter Form.

a) Bestimmen Sie die Tangentensteigung im Kurvenpunkt $P(x/y)$.

b) Zeigen Sie, dass die Kurve im Punkt $P_1\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,/\,\tfrac{1}{2}\right)$ eine waagrechte Tangente besitzt.

Aufgabe A2:

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $z=x+y$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$.

Aufgabe A3:

Bestimmen Sie die relativen Extremwerte der folgenden Funktionen.

a) $z=3xy^2+4x^3-3y^2-12x^2+1$

b) $z=xy-27\cdot\left(\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{y}\right)$

c) $z=2x^3-3xy+3y^3+1$

Aufgabe A4:

Welcher Punkt auf der Ebene $2x+3y+z=14$ hat vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand? Bestimmen Sie den Punkt zur Kontrolle auch mit Hilfe der aus der Analytischen Geometrie bekannten Techniken.

Aufgabe A5:

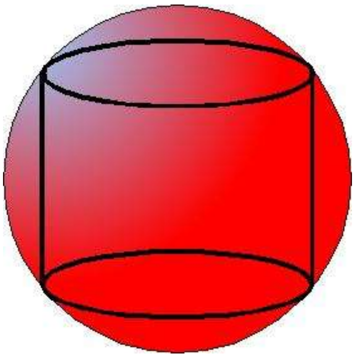
Gegeben seien zwei Exponentialfunktionen $y_1=e^{ax}$ und $y_2=e^{-bx}$ mit $a,b>0$. Bestimmen Sie a und b so, dass sich die Kurven rechtwinklig schneiden und der Flächeninhalt, den sie mit der x-Achse einschließen, möglichst klein wird.

Aufgabe A6:

Wie muss der Öffnungswinkel α eines kegelförmigen Trichters mit dem Volumen $V=10\,\text{cm}^3$ gewählt werden, wenn bei konstanter Dicke des verwendeten homogenen Blechs, der Materialverbrauch möglichst gering ausfallen soll.

Aufgabe A7:

Einer Kugel K mit dem gegebenen Radius r_K werde ein Zylinder einbeschrieben (siehe Figur 1). Wie sind die Höhe h_Z und der Radius r_Z des Zylinders in Abhängigkeit von r_K zu wählen, damit die Mantelfläche des Zylinders maximal wird?



Figur 1: Kugel mit einbeschriebenem Zylinder.