Themen:

Mehrdimensionale Analysis – Ableiten im Raum, Tangentialebene, totales Differential

---

Aufgabe A1:

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der folgenden Funktionen:

a) $z(x,y) = (3x-5y)^4$

b) $z(x,y) = \sqrt{x^2-2xy}$

c) $z(x,y) = e^{-x+y} + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

d) $z(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

e) $u(x,t) = \frac{x-2t}{2x+t}$

Lösungen: *(Es sind alle bekannten Ableitungsregeln zu verwenden.)*

a) $z_x = 12\cdot(3x-5y)^3$ und $z_y = -20\cdot(3x-5y)^3$

$z_{xx} = 108\cdot(3x-5y)^2$, $z_{yy} = 300\cdot(3x-5y)^2$ und $z_{xy} = z_{yx} = -180\cdot(3x-5y)^2$

b) $z_x = \frac{x-y}{\sqrt{x^2-2xy}}$ und $z_y = -\frac{x}{\sqrt{x^2-2xy}}$

$$z_{xx} = \frac{\sqrt{x^2-2xy}-(x-y)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2xy}}}{x^2-2xy} = \frac{x^2-2xy-x^2+2xy-y^2}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-y^2}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}},$$

$$z_{yy} = \frac{-x^2}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } z_{xy} = z_{yx} = -\frac{\sqrt{x^2-2xy}-x\cdot\frac{x-y}{\sqrt{x^2-2xy}}}{x^2-2xy} = \frac{xy}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}}.$$

c) $z_x = -e^{-x+y} + \frac{1}{y}\cdot\frac{y}{x} = -e^{-x+y} + \frac{1}{x}$ und $z_y = e^{-x+y} - \frac{y}{x}\cdot x\cdot y^{-2} = e^{-x+y} - \frac{1}{y}$

$z_{xx} = e^{-x+y} - \frac{1}{x^2}$, $z_{yy} = e^{-x+y} + \frac{1}{y^2}$ und $z_{xy} = z_{yx} = -e^{-x+y}$.

d) $z_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $z_y = \frac{y}{x^2+y^2}$

$$z_{xx} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ z_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ und } z_{xy} = z_{yx} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

e) $u_x = \frac{2x+t-2x+4t}{(2x+t)^2} = \frac{5t}{(2x+t)^2}$ und $u_t = \frac{-4x-2t-x+2t}{(2x+t)^2} = \frac{-5x}{(2x+t)^2}$

$u_{xx} = 5t\cdot(-2)\cdot(2x+t)^{-3}\cdot 2 = \frac{-20t}{(2x+t)^3}$, $u_{tt} = \frac{10x}{(2x+t)^3}$ und

$$u_{xt} = u_{tx} = \frac{5\cdot(2x+t)^2 - 10t\cdot(2x+t)}{(2x+t)^4} = \frac{10x+5t-10t}{(2x+t)^3} = \frac{10x-5t}{(2x+t)^3}.$$

Aufgabe A2:

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 3xy - \cos(x-y) + x^3y^5$. Zeigen Sie, dass $f_{xy} = f_{yx}$ ist und weisen Sie damit den Satz von Schwarz an diesem Beispiel nach.

Lösung:

Wir bilden die benötigten Ableitungen:

$$f_x = 3y + \sin(x-y) + 3x^2y^5 \text{ und } f_y = 3x - \sin(x-y) + 5x^3y^4.$$

Damit errechnen wir die gemischten Ableitungen 2. Ordnung:

$$f_{xy} = 3 - \cos(x-y) + 15x^2y^4 \text{ und } f_{yx} = 3 - \cos(x-y) + 15x^2y^4.$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe A3:

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y) = a\cdot e^{\frac{x}{y}}$ die Gleichung $xf_x + yf_y = 0$ erfüllt.

Lösung:

Wir leiten ab und setzen ein:

$f_x = a\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}$ und $f_y = -a\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x}{y^2}$. Damit folgt: $x\cdot\frac{a}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}} - y\cdot\frac{ax}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}} = x\cdot\frac{a}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}} - x\cdot\frac{a}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}} = 0$.

Das wollten wir zeigen.

Aufgabe A4:

Differenzieren Sie die Funktion $z = (xy)^2 + \sqrt{x}$ mit $x = t^2$ und $y = \sqrt{t}$ nach dem Parameter t zum einen durch die Verwendung der Kettenregel und zum anderen durch Einsetzen der Parametergleichung in die Funktionsgleichung.

Lösung:

Es ist $z(x,y) = z\left(t^2, \sqrt{t}\right) = \left(t^2\cdot\sqrt{t}\right)^2 + \sqrt{t^2} = t^5 + t = z(t)$ und damit $\dot{z}(t) = 5t^4 + 1$. Mit der Kettenregel folgt $\dot{z} = z_x\cdot\dot{x} + z_y\cdot\dot{y} = \left(2xy^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot 2t + 2yx^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Wir setzen ein und erhalten

$$z'(t) = \left(2 \cdot t^2 \cdot t + \frac{1}{2t}\right) \cdot 2t + 2\sqrt{t} \cdot t^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 4t^4 + 1 + t^4 = 5t^4 + 1.$$

Aufgabe A5:

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt P.

a) $z = \left(x^2 + y^2\right) \cdot e^{-x}$ und $P(0/1/1)$

b) $z = 3 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y}} + 2\cos(\pi \cdot (x + 2y))$ und $P(2/1/?)$

Lösungen:

a) Wir bilden die beiden partiellen Ableitungen: $z_x = 2x \cdot e^{-x} - \left(x^2 + y^2\right) \cdot e^{-x}$ und $z_y = 2y \cdot e^{-x}$. Setzen wir in die Tangentengleichung ein, dann erhalten wir

$$z = z_x(0;1) \cdot (x - 0) + z_y(0;1) \cdot (y - 1) + 1 = -x + 2 \cdot (y - 1) + 1 = -x + 2y - 1$$

b) Hier ist $z_x = 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{y}} - 2\pi \cdot \sin(\pi \cdot (x + 2y))$ und $z_y = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y^3}} - 4\pi \cdot \sin(\pi \cdot (x + 2y))$.

Dazu ist $z(2;1) = 8$ und daher $z = 3 \cdot (x - 2) - 3 \cdot (y - 1) + 8 = 3x - 3y + 5$.

Aufgabe A6:

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y, z) = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + b$ eine Lösung der sog. Laplace-Gleichung $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ist.

Lösungen:

Alles ausgerechnet ergibt:

$$\Delta u = a \cdot \frac{2x^2 - y^2 - z^2 + 2y^2 - x^2 - z^2 + 2z^2 - x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Exemplarisch: $f_x = \frac{-ax}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ und damit

$$f_{xx} = \frac{-a \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} + ax \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3} = \frac{-a \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) + ax \cdot 3x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{a \cdot \left(2x^2 - y^2 - z^2\right)}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Dabei haben wir mit $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ gekürzt.

Aufgabe A7:

Bestimmen Sie das totale Differential der Funktionen:

a) $z(x,y) = 4x^3 y - 3x \cdot e^y$

b) $u(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c) $f(x,t) = \dfrac{t^2 + x}{2t - 4x}$

Lösungen:

a) $dz = \left(12x^2 y - 3e^y\right)dx + \left(4x^3 - 3xe^y\right)dy$

b) $du = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}dx + \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}dy + \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}dz$

c)
$$df = f_x dx + f_t dt = \frac{2t - 4x + 4t^2 + 4x}{(2t-4x)^2}dx + \frac{2t\cdot(2t-4x) - 2t^2 - 2x}{(2t-4x)^2}dt$$
$$= \frac{2t + 4t^2}{(2t-4x)^2}dx + \frac{2t^2 - 8tx - 2x}{(2t-4x)^2}dt$$

Aufgabe A8:

Berechnen Sie unter Verwendung des totalen Differentials die Oberflächenänderung $\Delta O \approx dO$ eines Zylinders mit Boden und Deckel, dessen Radius $r = 10$ cm um $5\,\%$ vergrößert und dessen Höhe $h = 25$ cm gleichzeitig um $2\,\%$ verkleinert wurde und vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert ΔO_{exakt}.

Lösung:

Der Zylinder hat die Oberfläche $O = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Damit errechnen wir die beiden exakten Werte $O_{\text{normal}} = 2199{,}11$ cm² und (mit $r = 10{,}5$ cm und $h = 24{,}5$ cm) $O_{\text{verändert}} = 2309{,}07$ cm², womit sich die exakte Differenz (natürlich gerundet) von $\Delta O_{\text{exakt}} = 109{,}96$ cm² ergibt.

Mit dem totalen Differential erhalten wir:

$$dO = O_r dr + O_h dh = (2\pi h + 4\pi r)dr + (2\pi r)dh$$
$$\Rightarrow (2\pi\cdot 25 + 4\pi\cdot 10)\cdot 0{,}5 + (2\pi\cdot 10)\cdot(-0{,}5) \approx 109{,}96\,\text{cm}^2,$$

womit wir sehen, dass eine sehr gute Näherung der Oberflächenänderung vorliegt.