7 Aufgaben

1) Lösen Sie die Differentialgleichungen:

   a) $y \cdot y' - e^{2x} = 0$ b) $y' \cdot \tan x - 2\sqrt{y} = 0$

   c) $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$ d) $e^{yy'} - x = 0$

2) Wie lauten die Differentialgleichungen zu folgenden Kurvenscharen ($c \in \mathbb{R}$)

   a) $y = (x-c)^2$ b) $y = c(1 + \cos x)$ c) $y = ln[c(x-1)]$

3) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektoren der Kurvenscharen ($c \in \mathbb{R}$)

   a) $x + 2y = c$ b) $x^2 + 2y^2 = c$ c) $y = c \cdot e^{-2x}$

   Hinweis: Gegeben sei die Dgl. $y' = f(x, y)$. Kurven, die in jedem Punkt zum zugehörigen Linienelement senkrecht verlaufen, heißen **Orthogonaltrajektorien**. Die Dgl. der Orthogonaltrajektorien erhält man, indem man in der ursprünglichen Dgl. y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzt. Lösungskurven der gegebenen Dgl. und ihre Orthogonaltrajektorien schneiden sich in jedem Punkt unter einem rechten Winkel.

4) Berechnen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

   a) $y' = (x+y)^2$ b) $(2x - y + 3)y' = 1$

   c) $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$ d) $xy' + \sqrt{x^2 + y^2} = y$

5) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

   a) $y' + \frac{y}{1+x} + 6x = 0$; $y(0) = 3$ b) $y' \cdot \sin x = y \cdot \cos x$; $y(\frac{\pi}{6}) = 1$

   c) $y' + 2xy = 2x$; $y(0) = 2$ d) $y' \cdot x \cdot \ln x = y$; $y(e^2) = 1$

6) a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Dgl. $y' - \frac{y}{x} = x$

   b) Geben Sie direkt aus der Dgl. die Ortskurve der Extrempunkte der Scharkurven an.

   c) Skizzieren Sie die Lösungskurven durch $P(-2 \mid 0)$ sowie einige weitere Scharkurven.

7) a) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $y(x)$

   $y'' \cos x + y' \sin x = 0$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

   b) Berechnen Sie für $x \geq 0$ die allgemeine Lösung der Dgl. $2xy'' - y' = 9x^2$.

8) Wie lautet die allgemeine Lösung der Dgl. $y'' + 6y' + cy = 0$ für

   a) $c = 5$ b) $c = 9$ c) $c = 13$

9) Lösen Sie die Anfangswertprobleme

a) $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 2\dfrac{ds}{dt} + 2s = 0,\qquad s(0) = 1,\qquad s'(0) = 1;$

b) $y'' + 4y' + (4 + \omega^2)y = 0,\qquad y(0) = 1,\qquad y'(0) = \omega - 2;$

c) $y'' - 2ky' + k^2 y = 0,\qquad y(0) = \sqrt{2},\qquad y'(0) = k\sqrt{2};$

10) Gegeben ist ein System von Fundamentallösungen. Wie lautet die zugehörige Dgl. der Form $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$?

a) e^{2x} , e^{-4x} b) $\cos 4x$, $\sin 4x$

c) e^{2x} , $x \cdot e^{2x}$ d) $e^{-x}\cos 3x$, $e^{-x}\sin 3x$

11) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Dgl. $y'' - y' - 2y = r(x)$ für folgende Störfunktionen $r(x)$: a) $2x^2 - e^{2x}$; b) $\sin x$; c) e^{-x}

12) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

a) $y'' + 2y' + 5y = 50x + 8e^{-x}$ b) $y'' + 2y' + 5y = \cos 2x$

c) $y''' + y = 12\cosh x$ d) $y^{(4)} - 3y'' - 4y = x^2 + e^{-x}$

13) Geben Sie für die folgenden linearen Differentialgleichungen den Störgliedansatz zur Berechnung der partikulären Lösung y_p an. Die Berechnung von y_p ist nicht verlangt.

a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x^3 + e^{-x}\sin 2x$

b) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2(e^x + e^{-x})$

14) a) Welche Lösungskurven der Dgl. $y'' + 2y' - 3y = 2\sin x$ geht mit der Steigung 1 durch den Nullpunkt ?

b) Welche Lösungskurve der Dgl. $y'' + 6y' + 25y = 50x - 13$ hat in $P(0 \mid 1)$ eine waagrechte Tangente ?

15) a) Wie muß a gewählt werden, damit die Dgl. $y'' + ay' + 2y = 0$ die Lösung $y = e^{-x} - 2e^{-2x}$ besitzt ?
Wie lautet für dieses a die allgemeine Lösung ?

b) Die Dgl. $y'' + 2y' + 2y = g(x)$ besitze die partikuläre Lösung $y_p = 3\sin x$. Was ergibt sich für $g(x)$? Welche allgemeine Lösung hat die Dgl.? Welche spezielle Lösungkurve geht durch den Nullpunkt mit der Steigung 5 ?

16) a) Zeigen Sie, daß $y = e^{-x}\cos 2x$ eine spezielle Lösung der Dgl. $y''' + y' - 10y = 0$ ist. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Dgl. $y''' + y' - 10y = e^{-x}$ unter den Bedingungen $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $y(x)$ ist beschränkt für $x \to \infty$.

17) Diskutieren Sie die Lösungen der Dgl. $y'' + 2y' + p \cdot y = e^{-x}$ in Abhängigkeit vom reellen Parameter p.

18) Gegeben ist das Randwertproblem $y'' + \omega^2 y = 0;\ y(0) = y(\pi) = 0$

a) Wie lautet die allgemeine Lösung der Dgl.?

b) Für welche Werte von ω (Eigenwerte des homogenen Randwertproblems) läßt sich die allgemeine Lösung an die Randbedingungen anpassen?

c) Bestimmen und skizzieren Sie diejenige Lösungskurve, die in $[0, \pi]$ nur ein relatives Extremum besitzt und im Nullpunkt die Steigung 1 hat.

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten und der Anzahl der Extrema der zugehörigen Lösungsfunktionen ?

Zusatz: Welcher Gleichung genügen die Eigenwerte des Problems
$y'' + \omega^2 y = 0;\ y(0) + \dot{y}(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$
(Das lineare homogene Gleichungssystem für die Integrationskonstante besitzt nichttriviale Lösungen, wenn seine Koeffizientendeterminante Null ist.)

19) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\{\dot{x} + x - y = 0\ ;\ \dot{y} + 2x - y = 0\}$ mit $x(0) = 1\ ; y(0) = 0$
a) mit Hilfe des Eliminationsverfahrens
b) mit Hilfe der Matrizenrechnung (Eigenwertproblem)

20) Transformieren Sie die Dgl. $y''' - 2y'' + 3y' - y = 0$ auf die Normalform $\underline{y}' = \underline{A} \cdot \underline{y}$. Berechnen Sie die charakteristische Gleichung der gegebenen Dgl. und diejenige der Normalform.

21) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Dgl.-Systeme

a) $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 \end{aligned}$$

22) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
$\{\dot{x} + y = \sin 2t\ ;\ \dot{y} - x = \cos 2t\}$ mit $x(0) = 1,\ y(0) = 0$

23) Gegeben ist das Dgl.-System $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$ mit $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -3 \end{bmatrix}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte der Matrix $\underline{A}$ reell, für welche sind sie komplex ?

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Lösungen des Systems asymptotisch stabil ?

24) Transformieren Sie das Differentialgleichungssystem

$$\ddot{x}_1 + 2ax_1 + ax_2 + b\dot{x}_1 = \cos\omega t$$
$$\ddot{x}_2 + 2ax_2 + ax_1 + b\dot{x}_2 = 0$$

durch Einführung der Zustandsvariablen
$\{z_1 = x_1,\ z_2 = \dot{x}_1,\ z_3 = x_2,\ z_4 = \dot{x}_2\}$
in ein System der Form $\underline{\dot{z}} = \underline{A} \cdot \underline{z} + \underline{r}$.

25) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} + 3x - 2\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + 3y + 2\dot{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ mit } x(0) = 1,\ \dot{x} = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{y} = 1.$$

a) Zeigen Sie, daß sich das System auf die Dgl. $\ddddot{x} + 10\ddot{x} + 9x = 0$ zurückführen läßt und ermitteln Sie damit die Lösung des Anfangswertproblems.

b) Formen Sie das System um in ein System von 4 Dgl. 1.Ordnung. Wie lautet die charakteristische Gleichung dieses Systems.

26) Von einem Dgl.-System $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$ 2.Ordnung kennt man einen Eigenwert $\lambda_1 = -1 + j$ und den zugehörigen Eigenvektor $\underline{c_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$

a) Geben Sie den 2.Eigenwert und die allgemeine Lösung des Systems an.

b) Bestimmen Sie die Matrixelemente $a_{11},\ a_{12},\ a_{21}$, wenn $a_{22} = -1$ ist.

27) Die freien Schwingungen eines Feder-Masse-Systems mit 2 Freiheitsgraden werden beschrieben durch das Dgl.- System:

$$\left\{\ddot{x}_1 + 3\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 = 0;\ \ddot{x}_2 - 2\omega^2 x_1 + 2\omega^2 x_2 = 0\right\}$$

Bestimmen Sie die Kreisfrequenzen und die Amplitudenvektoren der beiden Grundschwingungen. Wie lautet die allgemeine Lösung des Systems? Welche Lösung ergibt sich speziell für die Anfangsbedingung

$$\{x_1(0) = 1,\ \dot{x}_1(0) = 0,\ x_2(0) = -1,\ \dot{x}_2(0) = 0\}\ ?$$

28) Gegeben ist die Dgl. $\ddot{x} + \sin x \cdot \cos x = 0$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Phasenkurven in der $x, \dot{x}$-Ebene.

b) Skizzieren Sie die Phasenkurven zu den Anfangsbedingungen

b1) $x(0) = \frac{\pi}{4},\ \dot{x}(0) = 0$ b2) $x(0) = \frac{\pi}{4}, \dot{x} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b3) $x(0) = \frac{\pi}{4},\ \dot{x}(0) = 1$

29) Bestimmen Sie die Gleichung der Phasenkurven zu folgenden Dgln.

a) $\ddot{x} + 2x^3 = 0$ b) $\ddot{x} - x + 2x^3 = 0$

Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt.

15) $Z(\omega) = R + \frac{\omega L}{1-\omega^2 LC} j$

a) Re $(Z) = R$, Im $(Z) = \frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}$, $|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{(1-\omega^2 LC)^2}}$;

b) Gerade $x = \text{Re}\,(Z) = R$ parallel zur imaginären Achse ; c) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

16) a_1) Gerade Re $(w) = -\frac{1}{2}$; a_2) reelle Achse ;

a_3) Kreis um $(-\frac{1}{2} \mid 0)$ mit Radius $\frac{1}{2}$; a_4) Inneres des Kreises von a_3)

b_1) Kreis um $(1 \mid -\frac{1}{2})$ mit Radius $\frac{1}{2}$; b_2) Kreis um $(1 \mid 0)$ mit Radius $\frac{1}{2}$

2 Lösungen zu II.7

1) a) $y = \pm\sqrt{C + e^{2x}}$, b) $y = [C + \ln|\sin x|]^2$, c) $\frac{1}{3}y^3 + y^2 + y + \frac{1}{4}x^4 = C$

d) $y = \pm\sqrt{2x[\ln(x) - 1] + C}$

2) a) $4y - y'^2 = 0$; b) $y \sin x + y'(1 + \cos x) = 0$; c) $y'(x-1) = 1$

3) a) $y = 2x + C$; b) $y = Cx^2$; c) $y = \pm\sqrt{x + C}$

4) a) $y = -x + \tan(x + C)$; b) $e^{-2y}(\frac{y}{2} - x - \frac{5}{4}) = C$; c) $x^2 + y^2 - Cx = 0$;

d) $y = \frac{1}{2}(C - \frac{x^2}{C})$, $C > 0$

5) a) $y = \dfrac{3 - 3x^2 - 2x^3}{1 + x}$; b) $y = 2\sin x$; c) $y = 1 + e^{-x^2}$; d) $y = \frac{1}{2}\ln x$

6) a) $y = Cx + x^2$; b) $y = -x^2$; c) $y = x(C + x)$ nach oben geöffnete Normalparabel mit $S(-\frac{C}{2} \mid -\frac{C^2}{4})$

7) a) $y = 2\sin x + 1$; b) $y = x^3 + C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2$

8) a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$; b) $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$;

c) $y = e^{-3x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$

9) a) $s = e^{-t}(\cos t + 2\sin t)$; b) $y = e^{-2x}(\cos\omega x + \sin\omega x)$; c) $y = \sqrt{2}e^{Kx}$

10) a) $y'' + 2y' - 8y = 0$; b) $y'' + 16y = 0$; c) $y'' - 4y' + 4y = 0$

d) $y'' + 2y' + 10y = 0$

11) $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

a) $y = y_h - \frac{3}{2} + x - x^2 - \frac{1}{3}xe^{2x}$; b) $y = y_h + \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$;

c) $y = y_h - \frac{1}{3}xe^{-x}$

12) a) $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2) + 10x - 4$;

b) $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{17}(\cos 2x + 4\sin 2x)$;

c) $y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + 3e^x + 2xe^{-x}$;

d) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{6}e^{-x}$

13) a) $y_p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + e^{-x}(b_1\cos 2x + b_2\sin 2x)$
b) $y_p = e^x(a_0 + a_1x + a_2x^2) + x^3e^{-x}(b_0 + b_1x + b_2x^2)$

14) a) $y = -\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{10}e^{-3x}$; b) $y = 2x - 1 + e^{-3x}(\sin 4x + 2\cos 4x)$

15) a) $a = 3$; $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$; b) $g(x) = 3\sin x + 6\cos x$
$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 3\sin x$; $y_p = 2e^{-x}\sin x + 3\sin x$

16) a) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + C_3e^{2x}$;
b) $y = -\frac{1}{12}e^{-x} + \frac{1}{12}e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$

17) $p = 1: \quad y = e^{-x}(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2)$
$p > 1: \quad y = e^{-x}(C_1\cos\sqrt{p-1}x + C_2\sin\sqrt{p-1}x) + \frac{1}{p-1}e^{-x}$
$p < 1: \quad y = e^{-x}(C_1e^{\sqrt{1-p}x} + C_2e^{-\sqrt{1-p}x}) + \frac{1}{p-1}e^{-x}$

18) a) $y = C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)$; b) $\omega = \pm 1, \pm 2, \dots$; c) $y = \sin x$
d) Zu den Eigenwerten $\omega = \pm n$ gehören n Extrema in $0 < x < \pi$
<u>Zusatz:</u> $\sin(\omega\pi) - \omega\cos(\omega\pi) = 0$

19) $x = \cos t - \sin t$; $y = -2\sin t$

20) $\{y_1' = y_2 \; ; \; y_2' = y_3 \; ; \; y_3' = y_1 - 3y_2 + 2y_3\}$; $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

21) a) $\underline{x} = K_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + K_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t}$

b) $\underline{x} = K_1 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + K_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$

22) $\underline{x} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$

23) a) reell für $\alpha \le 4$; komplex für $\alpha > 4$; b) $\alpha > 3$

24) $\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2a & -b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -2a & -b \end{bmatrix} \underline{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\omega t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

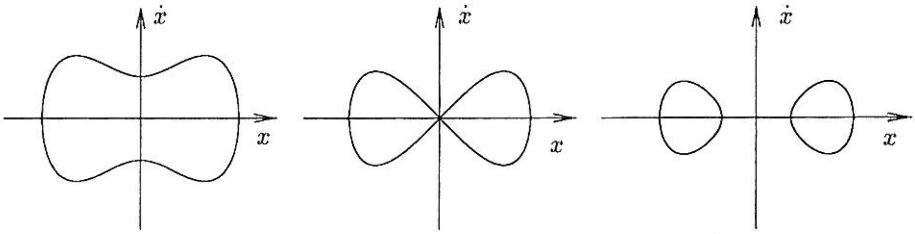
25) a) $\{x = \cos t \; ; \; y = \sin t\}$
b) Mit $\{x_1 = x \; ; \; x_2 = \dot{x} \; ; \; x_3 = y \; ; \; x_4 = \dot{y}\}$ ergibt sich
$\{\dot{x}_1 = x_2 \; ; \; \dot{x}_2 = 2x_4 - 3x_1 \; ; \; \dot{x}_3 = x_4 \; ; \; \dot{x}_4 = -3x_3 - 2x_2\}$; $\lambda^4 + 10\lambda^2 + 9 = 0$

26) a) $\lambda_2 = -1 - j$; $\underline{x} = C_1e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + C_2e^{-t}\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$
b) $a_{11} = -1$; $a_{12} = 1$; $a_{21} = -1$

27) char.Gleichung $\lambda^4 + 5\omega^2\lambda^2 + 4\omega^4 = 0$; Eigenfrequenzen $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 2\omega$;
Schwingungsformen $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
allgemeine Lösung $\{x_1(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + C_3 \cos 2\omega t + C_4 \sin 2\omega t$; $x_2(t) = 2C_1 \cos\omega t + 2C_2 \sin\omega t - C_3 \cos 2\omega t - C_4 \sin 2\omega t\}$
Spezielle Lösung $\{x_1(t) = \cos 2\omega t$; $x_2(t) = -\cos 2\omega t\}$ vgl. 2.Grundschwingung!

28) a) $\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\cos 2x + C$; b$_1$) $C = 0 : \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\cos 2x$;
b$_2$) $C = \frac{1}{2} : \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$; b$_3$) $C = 1 : \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\cos 2x + 1$

29) a) $\dot{x}^2 = k - x^4$; b) $\dot{x}^2 = k + x^2 - x^4$



$k > 0$ $\qquad$ $k = 0$ $\qquad$ $-\frac{1}{4} < k < 0$