Lösungen Blatt 9 Mathe II

73) $\int_1^2 \frac{4}{x} \ln(x^2)\,dx$

Berechnung der Stammfunktion

$x^2 = u\,;\ \frac{du}{dx} = 2x\,;\ dx = \frac{du}{2x}$

$\int \frac{4}{x} \ln(u) \frac{du}{2x} = 2 \int \underbrace{\frac{1}{u}}_{f'} \underbrace{\ln u}_{f}\, du$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} (\ln u)^2 = (\ln x^2)^2$

$F(x) = (\ln x^2)^2$

a) $\int_1^2 f(x)dx = (\ln x^2)^2 \Big|_1^2$

$= (\ln 4)^2 = \underline{1.92181206}$

b) Rechteckregel

$J_R = \frac{1}{2}\left(f(1{,}25) + f(1{,}75)\right)$

$J_R = \frac{1}{2}\left(1.428118 + 2.558243\right)$

$J_R = 1.993181$

Trapezregel:

$J_T = \frac{1}{4}\left(f(1) + 2f(1.5) + f(2)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(0 + 2 \cdot 2.162480 + 2.772588\right)$

$= 1.774387$

c) Simpson-Formel

$m = 1$:

$J_S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1}\left(f(0) + 4f(1.5) + f(2)\right)$

$= \frac{1}{6}\left(0 + 4 \cdot 2.162480 + 2.772588\right)$

$= \underline{1.903751}$

$m = 2$:

$J_S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\left[f(0) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)\right]$

$J_S = \frac{1}{12}\left[0 + 4 \cdot 1.428118 + 2 \cdot 2.162480 + 4 \cdot 2.558243 + 2.772588\right]$

$= \frac{1}{12}\left(23.042992\right)$

$= \underline{1.920249}$

Fehler bei $m=2$ Doppelstreifen

Fehler $\approx \frac{1}{15} \left| \left(J_{S_2} - J_{S_1} \right) \right|$

Fehler ≈ 0.00110

nochmals Rechnung mit $\underline{m = 4}$

$J_{S_4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\left[f(0) + 4 \cdot f(1.125) + 2f(1.25) + 4f(1.375) + 2f(1.5) + 4f(1.625) + 2 \cdot f(1.75) + 4 \cdot f(1.875) + f(2)\right]$

$J_{S_4} = \frac{1}{24}\left(0 + 4 \cdot 0.83756825 + 2 \cdot 1.428187 + 4 \cdot 1.8528217 + 2 \cdot 2.1624805 + 4 \cdot 2.3901923 + 2 \cdot 2.5582436 + 4 \cdot 2.6820636 + 2.7725887\right)$

$= \frac{1}{24}\left(46.1209943\right)$

$= \underline{1.9217081}$

Fehler bei $m=4$ Doppelstreifen

Fehler $\approx \frac{1}{15} \left| \left(J_{S_4} - J_{S_2} \right) \right|$

Fehler ≈ 0.000097

Bei der obigen Fehlerabschätzung wurde der exakte Wert nicht verwendet. (diesen Wert kennt man in der Regel auch nicht)

d) Nun wird der prozentuale Fehler ermittelt durch Vergleich mit dem exakten Wert

Rechteckregel: $\frac{J_R - J_{exakt}}{J_{exakt}} \cdot 100\%$

$\approx 3.7\%$

Trapezregel: $\frac{J_T - J_{ex}}{J_{ex}} \cdot 100\% \approx 7.67\%$

Simpson:

$m=1$: $\frac{J_{S_1} - J_{ex}}{J_{ex}} \cdot 100\% \approx 0.94\%$

$m=2$: $\frac{J_{S_2} - J_{ex}}{J_{ex}} \cdot 100\% \approx 0.08\%$

$m=4$: $\frac{J_{S_4} - J_{ex}}{J_{ex}} \cdot 100\% \approx 0.005\%$

74) Zu den folgenden Integralen existiert keine Stammfunktion

a) $J_{S_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{8}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cdot f\left(\frac{3}{8}\pi\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$J_{S_2} = \frac{\pi}{24}\left(1 + 4 \cdot 0.974495 + 2 \cdot 0.900316 + 4 \cdot 0.784213 + 0.636620\right)$

$\underline{J_{S_2} = 1.370793}$

Bem.: dieses Integral kann man näherungsweise auch mit Taylorreihen berechnen.

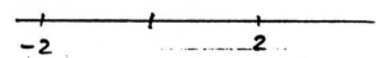
b) $J_{S_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\left[f(0) + 4 \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$

$J_{S_2} = \frac{1}{12}\left[1 + 4 \cdot 0.9980526 + 2 \cdot 0.9701425 + 4 \cdot 0.8715755 + 0.7071068\right]$

$= \frac{1}{12} \cdot 11.125904 = \underline{0.927159}$

c) $\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx = 2\int_0^2 e^{-x^2}dx$

$m = 2$:



entspricht einem Doppelstreifen in $[0, 2]$

$J_{S_2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2}\left[e^0 + 4e^{-1} + e^{-4}\right]$

$J_{S_2} = \underline{1.659889}$

$m = 4$: $\hat{=}$ 2 Doppelstreifen in $[0, 2]$

$J_{S_4} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4}\left[e^0 + 4 \cdot e^{-\frac{1}{4}} + 2e^{-1} + 4e^{-\frac{9}{4}} + e^{-4}\right]$

$J_{S_4} = \frac{1}{3} \cdot 5.2908744 = \underline{1.7636248}$

Fehler bei 4 Doppelstreifen

Fehler $\approx \frac{1}{15} \left| J_{S_4} - J_{S_2} \right|$

Fehler ≈ 0.0069