Studienfach: Mathematik
Klausur

Datum: 21.03.2011

Ausbildungsbereich:	Technik	**Studienjahrgang:**	2011
Fachrichtung:	Maschinenbau	**Studienhalbjahr:**	1
Gruppe:		**Bearbeitungszeit:**	90 Minuten
Dozent:	Bauer, Baum		
Hilfsmittel:	Alle, außer elektronische Rechner		
Bewertung:	Punkte:	Note:	Signum: ....

Student: ....

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen - 30 min.)

a) Gegeben ist die komplexe Zahl $z = \left(\frac{2j}{1-j}\right)^9$.

Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von z und stellen Sie z in der Form $re^{j\varphi}$ dar.

b) Welche Punktmenge wird in der Gaußschen Zahlenebene festgelegt durch

$$|z|^2 - \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) \leq 1 \qquad ? \qquad \text{(Skizze!)}$$

c) Die harmonische Schwingung $x(t) = 3\cos(\omega t) + a\sin(\omega t)$ lässt sich in der Form $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ darstellen.

Wie muss $a > 0$ gewählt werden, damit sich als Phasenwinkel $\varphi = -30^\circ$ ergibt?

Welche Amplitude $A > 0$ besitzt dann diese Schwingung?

d) Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

(i) $A = \left\{ z \,\middle|\, z = -1 + 2j + te^{j\frac{\pi}{4}}, t \in \mathbb{R} \right\}$ (ii) $B = \left\{ z \,\middle|\, z = 2 + j + 3e^{jt}, t \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 2 *(Vektorrechnung - 30 min.)*

a) Der Ortsvektor des Punktes P bildet mit der y-Achse einen Winkel von 60° und mit der z-Achse einen Winkel von 45°; sein Betrag ist gleich 8. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, wenn seine x-Koordinate negativ ist.

b) Die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind von gleicher Länge und bilden paarweise gleiche Winkel. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{c}$, wenn $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ und $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ mit

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ gegeben sind.}$$

c) Berechnen Sie einen zu

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ senkrechten Vektor der Länge } 4\sqrt{5}.$$

Aufgabe 3 *(LGS, Matrizenrechnung - 30 min.)*

a) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k-2 \\ k & 2 & 2 \\ 1 & k+1 & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k+4 \\ k^2+2k+1 \\ 2(k+1) \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von k hat das lineare Gleichungssystem

(i) eine eindeutige Lösung?
(ii) unendlich viele Lösungen bzw. keine Lösung?

Geben Sie die Lösung für $k = -2$ an.

b) Bestimmen Sie die Lösung $\underline{X}$ der Matrizengleichung $\underline{A}\underline{X} + \underline{X}\underline{A}^T = \underline{E}$,
wobei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

A1 a) $z = \left(\frac{2j}{1-j}\right)^9 = \left(\frac{2j(1+j)}{(1-j)(1+j)}\right)^9 = \left(\frac{2j-2}{2}\right)^9 = (j-1)^9$

$\Rightarrow z = 2^{9/2} e^{j\frac{3}{4}\pi \cdot 9} = 2^{9/2} e^{j\frac{27}{4}\pi} = \boxed{2^{9/2} e^{j\frac{3}{4}\pi}}$

$= 2^{9/2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + j\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$

$= 2^{9/2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 16(-1+j)$

$\Rightarrow \boxed{Re(z) = -16} \quad \boxed{Im(z) = 16}$

b) $z = x + jy: \quad |z|^2 - Re(z) - Im(z) \leq 1$

$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 - x - y \leq 1 \Longleftrightarrow x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$

$\Longleftrightarrow \boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}}$

$\Longleftrightarrow$ Inneres eines Kreises um $\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}\right)$ mit Radius $\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) $x(t) = 3\cos(\omega t) + a\sin(\omega t) \overset{!}{=} A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$

$\Longleftrightarrow 3\cos(\omega t) + a\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$

$\Longrightarrow 3e^{j0} + a e^{-j\frac{\pi}{2}} = A e^{-j\frac{\pi}{6}}$

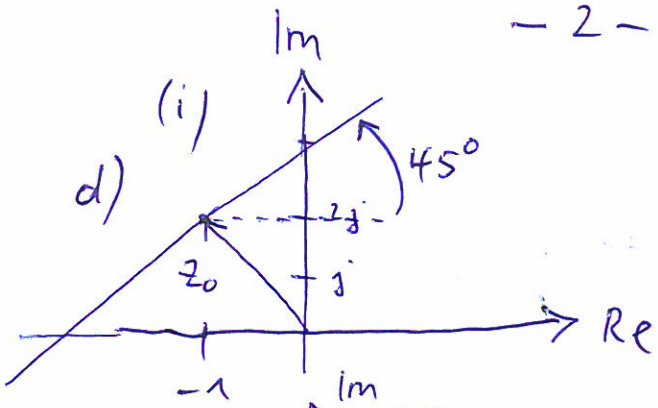
$\Longrightarrow 3 + a\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - j\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\right) = A\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\Longrightarrow 3 - aj = A\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - Aj\cdot\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow (1)\ A\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = 3 \wedge (2)\ a = \frac{A}{2} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{A = 2\sqrt{3}}$

(1) in (2) $\Longrightarrow \boxed{a = \sqrt{3}}$

d) (i)



$z_0 = -1 + 2j$

Gerade

$z = -1 + 2j + t\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$

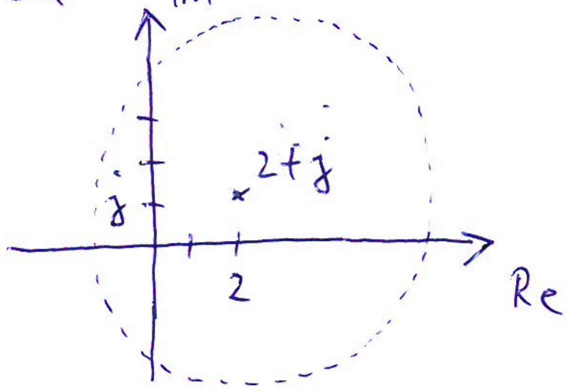
$= -1 + 2j + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)$

$= x + jy \Rightarrow x = -1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\wedge\ y = 2 + t\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow t\frac{\sqrt{2}}{2} = x + 1 \Rightarrow \boxed{y = x + 3}$

(ii)



Kreis um $2+j$ mit Radius 3.

A2 a) Sei $P(p_1|p_2|p_3)$

$\cos\sphericalangle(\vec{OP}, \vec{j}) = \cos(60°) = \frac{1}{2} = \frac{p_2}{|\vec{OP}|} =: \cos\beta$

$\Rightarrow \boxed{p_2 = \frac{1}{2}|\vec{OP}| \cdot 8 = 4}$

$\cos\sphericalangle(\vec{OP}, \vec{k}) =: \cos\gamma = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{p_3}{|\vec{OP}|}$

$\Rightarrow \boxed{p_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 8 = 4\sqrt{2}}$

Es gilt: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow |\cos\alpha| = \frac{1}{2} \underset{p_1<0}{\Longrightarrow} \boxed{p_1 = -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4}$

$\Rightarrow \boxed{P(-4|4|4\sqrt{2})}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2} \Longrightarrow |\vec{c}| = \sqrt{2}$$

$$\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} =: \cos\alpha \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$

$$\cos \measuredangle(\vec{c}, \vec{a}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}\,|\vec{c}|} = \sqrt{2}$$

$$\cos \measuredangle(\vec{c}, \vec{b}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2} \cdot |\vec{c}|}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{matrix} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \boxed{c_3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}} \quad \boxed{c_2 = 1 - \lambda} \quad \boxed{c_1 = \lambda}$$

$\Longrightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$. Es gilt: $|\vec{c}| = \sqrt{\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + \lambda^2} = \sqrt{2}$

$$\Longrightarrow 3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 1 \lor \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \lor \boxed{\vec{c}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}}$$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$\Longrightarrow \vec{c} = \pm 4 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{3\cdot\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\pm 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$= \boxed{\pm \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

A3 a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k-2 \\ k & 2 & 2 \\ 1 & k+1 & 2k \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Entw.}\\ \text{nach}\\ 1.\,Z.}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ k+1 & 2k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & 2k \end{vmatrix} + (k-2)\begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix} =$$

$$= k^3 + k - 2k = \boxed{k(k+2)(k-1)}$$

(i) LGS besitzt <u>eind.</u> Lsg $\boxed{\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 1\}}$

(ii) $\boxed{k=-2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right) \quad |\cdot 2 \quad |(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$Rg(A) = Rg(A|\vec{b}) = 2 < 3 \Rightarrow$ <u>unendl.</u> viele Lsgen.

$x_1 = t;\ t \in \mathbb{R}\ ;\quad x_3 = \frac{1}{2};\quad x_2 = t$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{k=0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}$$

$Rg(A) \neq Rg(A|\vec{b}) \Longrightarrow$ LGS <u>unlösbar</u>

$\boxed{k=1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} |\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array} \Longrightarrow Rg(A) = Rg(A|\vec{b}) = 2 < 3$$

$\Longrightarrow$ <u>unendl.</u> viele Lsgen.

b) $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$$\underline{A}\,\underline{X} + \underline{X}\,\underline{A}^T = \underline{E}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 4x_{11} & 3x_{12} - x_{11} \\ 3x_{21} - x_{11} & 2x_{22} - x_{12} - x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Vergleich}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\underline{X} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}$$