Name / Vorname: ....

Berufsakademie Stuttgart Staatliche Studienakademie Klausur	Ausbildungsbereich: Technik Fachrichtung: Maschinenbau Studienjahrgang: TMB00 G2/3/4 Studienhalbjahr: 1	
Studienfach: Mathematik	Datum: 19.03.2001	
Dozent: Bauer, Schäffler	Bearbeitungszeit: 90 min.	
Hilfsmittel: alle keine el. Rechner	Punkte: Note: Signum: Angaben dieses Feldes können auf dem 1. Lösungsblatt stehen.	

Aufgabe 1 (40 min.)

Eine Ebene E ist gegeben durch die Punkte A(4/7/0), B(0/3/4) und C (0/0/1).

a) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt D der Ebene E mit der x-Achse.
b) Wie groß ist die Fläche des Vierecks ABCD ?
c) Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt 0* von 0(0/0/0) bezüglich der Ebene E ?
d) Bestimmen Sie in Parameterform und in parameterfreier Form die Gleichung der Ebene E1, welche die Punkte B und C enthält und auf der Ebene E senkrecht steht.
e) Geben Sie die Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen E1 und E in Parameterform an.

Aufgabe 2 (20 min.)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem in x, y, z:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= 1 \\ x + y + \lambda^2 z &= \lambda + 2 \end{aligned}$$

Für welche reellen Parameterwerte λ besitzt obiges Gleichungssystem
a) eine eindeutige Lösung
b) mehr als eine Lösung
c) keine Lösung?

Für die Fälle a) und b) berechne man die Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe 3 (30 min.)

a) Bestimmen Sie die Exponentialform der komplexen Zahl

$$z = -2 \cdot [\cos 135° - j \sin 135°]^{10}$$

b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$(1 - j)\, z^3 + 8\,(1 + j) = 0\,.$$

Skizzieren Sie die Wurzelwerte in der Gaußschen Ebene.

c) Für welche Zahlen $z = x + j\,y$ gilt

$$j + 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\} = z\,?$$

d) Für welche positive reelle Konstante A ergibt die Überlagerung der beiden harmonischen Schwingungen

$$A \sin(2t) + 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

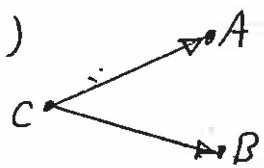
eine reine Cosinus-Schwinung?
(Lösung zeichnerisch und rechnerisch mit Hilfe komplexer Zeigeraddition)

1 **Aufgabe 1 (40 min.)** BA, 1 Hj, 19.3.2001 |16P|

Eine Ebene E ist gegeben durch die Punkte A(4/7/0), B(0/3/4) und (0/0/1).

a) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt D der Ebene E mit der x-Achse.
b) Wie groß ist die Fläche des Vierecks ABCD ?
c) Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt 0* von 0(0/0/0) bezüglich der Ebene E ?
d) Bestimmen Sie in Parameterform und in parameterfreier Form die Gleichung der Ebene E1, welche die Punkte B und C enthält und auf der Ebene E senkrecht steht.
e) Geben Sie die Gleichung der Schnittgeraden G der beiden Ebenen E1 und E in Parameterform an.

1a) $E: \vec{r} = \vec{r}_C + \lambda(\vec{r}_A - \vec{r}_C) + \mu(\vec{r}_B - \vec{r}_C)$



1) $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt D von Ebene E mit der X-Achse

$\left.\begin{array}{l} y = 0 = \quad 7\lambda + 3\mu \\ z = 0 = 1 - \lambda + 3\mu \end{array}\right\} \Rightarrow 8\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 1/8 \\ \mu = -7/24 \end{array}$

$\vec{r}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{7}{24}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{D = (0{,}5/0/0)}$

Lösungsweg:

$\vec{n}_0 = \vec{CA} \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4)

$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_C \cdot \vec{n} \Rightarrow 2x - y + z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

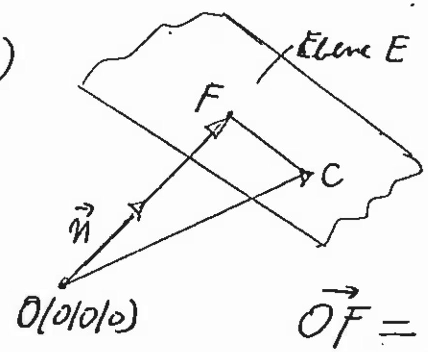
mit $y = 0$ und $z = 0 \Rightarrow x = 1/2 \Rightarrow D = (0{,}5/0/0)$

1b) $A_{ABCD} = \frac{1}{2}|\vec{CA} \times \vec{CB}| + \frac{1}{2}|\vec{CA} \times \vec{CD}| = \frac{1}{2}|\vec{n}_0| + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 7 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$A_{ABCD} = \frac{12}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -7 \\ 7/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}\right| = 6\sqrt{6} + \frac{7}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$

$\ldots + 7\sqrt{6} = \boxed{21 \cdot \sqrt{6} = A}$ (7)

1c)



$\vec{OF} = \frac{(\vec{r}_C \cdot \vec{n})\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$

$\vec{OF} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\frac{\vec{n}}{6}$

$\vec{OF} = 1 \cdot \frac{\vec{n}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$ 2)

$\vec{OO^*} = 2\vec{OF} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{O^* = \left(\frac{2}{3} \middle| -\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{3}\right)}$

2. Lösungsweg zu 1c): Gerade g durch O(0/0/0) senkrecht zur Ebene E:

$\vec{r}_g = t \cdot \vec{n} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_g = 2t \\ y_g = -t \\ z_g = t \end{array}$ (4)

Schnitt von $\vec{r}_g$ mit Ebene E ergibt Punkt F:

mit E. $2x - y + z = 1 \Rightarrow 2(2t) - (-t) + t = 1 \Rightarrow$

$t = 1/6 \Rightarrow \vec{r}_F = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/6 \\ -1/6 \\ +1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{OF}$

$\boxed{\vec{OO^*} = 2\vec{OF} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Alternative: Schnitt von g mit E in Parameterform:

$\vec{r}_E = \vec{r}_g: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 4\lambda = 2t \\ 7\lambda + 3\mu = -t \\ 1 - \lambda + 3\mu = t \end{array}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{12};\ t = 2\lambda = \frac{1}{6};\ \vec{r}_F = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \ldots \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \ldots \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{OO^*} = 2\vec{r}_F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \ldots \end{pmatrix}$

(2)

Studienfach: Mathematik	Datum: 19. . 2001		
Dozent: Bauer, Schäffler	Bearbeitungszeit: 90 min.		
Hilfsmittel: alle, keine el. Rechner.	Punkte:	Note:	Signum:
	Angaben dieses Feldes können auf dem 1. Lösungsblatt stehen.		

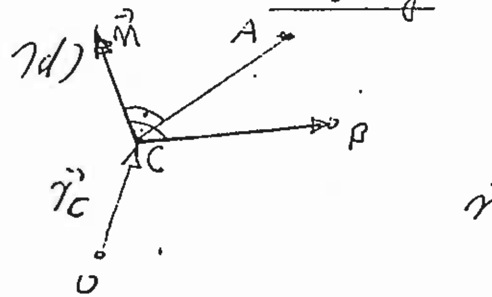
Aufgabe 1 (40 min.)

Eine Ebene E ist gegeben durch die Punkte A(4/7/0), B(0/3/4) und C (0/0/1).

a) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt D der Ebene E mit der x-Achse.
b) Wie groß ist die Fläche des Vierecks ABCD ?
c) Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt 0" von 0(0/0/0) bezüglich der Ebene E ?
d) Bestimmen Sie in Parameterform und in parameterfreier Form die Gleichung der Ebene E1, welche die Punkte B und C enthält und auf der Ebene E senkrecht steht.
e) Geben Sie die Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen E1 und E in Parameterform an.

Lösungen

1d)



E_1: Einstiegsvektor $\vec{r}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

somit die 2 Vektoren $\vec{CB}$ und Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene E durch A, B und C

$$\boxed{E_1:\ \vec{r} = \vec{r}_c + \lambda\vec{CB} + \mu\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

E_1 in parameterfreier Form:

$$\vec{N}_{E1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{E1} \cdot \vec{n}_{E1} = \vec{r}_c \cdot \vec{n}_{E1} \Rightarrow x + y - z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$E_1:\ \boxed{x + y - z + 1 = 0}$$

alternative Bestimmung zur parameterfreien Form von E_1:

1d)
$$\begin{aligned} x &= 2\mu \Rightarrow x = 2\mu \Rightarrow \mu = x/2 \\ y &= 3\lambda - \mu \\ z &= 1 + 3\lambda + \mu \end{aligned} \Big\} \Rightarrow y + z = 1 + 6\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{y+z-1}{6}$$

$$z = 1 + \left(\frac{y+z-1}{2}\right) + \frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{x + y - z = -1}$$

(3)

1e) Aus der Skizze ist sofort ersichtlich, daß die Ebene E_1 die Ebene E längs der Geraden $\overline{CB}$ schneidet:

Gerade durch $\overline{CB}$: mit $\vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\vec{r}_g = \vec{r}_c + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}_g}$$

2. Lösungsweg zur Bestimmung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2

$$\begin{aligned} E&:\ 2x - y + z = 1 \\ E_1&:\ x + y - z = -1 \end{aligned} \Big\}\ \text{mit } z = \lambda \text{ folgt}$$

(3)

$$\boxed{\begin{aligned} 2x - y &= 1 - \lambda \\ x + y &= -1 + \lambda \end{aligned}} \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y = -1 + \lambda$$

Also:
$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -1 + \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{r}_g}$$

Aufgabe 2 (20 min.) $\boxed{8P}$ BA, 1 Hj, 19.3.2001

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem in x, y, z:

$$x - 2y + z = 0$$
$$2x - y + 2z = 1$$
$$x + y + \lambda^2 z = \lambda + 2$$

Für welche reellen Parameterwerte λ besitzt obiges Gleichungssystem
a) eine eindeutige Lösung
b) mehr als eine Lösung
c) keine Lösung?

Für die Fälle a) und b) berechne man die Lösung des Gleichungssystems.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda^2 & \lambda+2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda^2-1 & \lambda+2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda+1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x - 2y + z = 0 \\ \Rightarrow 3y = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}} \\ \Rightarrow (\lambda^2-1)z = (\lambda+1) \end{array}$$

2

$(\lambda-1)(\lambda+1)z = (\lambda+1) \Rightarrow$ c) keine Lösung für $\lambda = 1$, weil Wider 1

Fortsetzung Aufgabe 2

2b) für $\lambda = -1$ entfällt letzte Gleichung $(\lambda^2-1)z = \lambda+1$
also gibt es nur 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten x, y, z, also ist eine Unbekannte frei wählbar, und es gibt $\boxed{\infty \text{ viele Lösungen}}$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = 1/3 \\ z = t \\ x = \frac{2}{3} - t \end{array}} \quad \boxed{t \in \mathbb{R}}$$

2

2a) $\boxed{\text{Eindeutige Lösung}}$ falls $\lambda \neq 1$ und $\lambda \neq -1$

$$x - 2y + z = 0$$
$$y = 1/3 \Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}}$$
$$(\lambda-1)\cancel{(\lambda+1)}z = \cancel{(\lambda+1)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{\lambda-1}}$$

3

Aus $x - 2y + z = 0 \Rightarrow x = 2y - z$

$$\boxed{x = \frac{2}{3} - \frac{1}{\lambda-1}}$$

Aufgabe 3 (30 min.) 12P

a) Bestimmen Sie die Exponentialform der komplexen Zahl (2)

$z = -2 \cdot [\cos 135° - j \sin 135°]^{10}$

b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$(1-j)\,z^3 + 8\,(1+j) = 0$.

(3) Skizzieren Sie die Wurzelwerte in der Gaußschen Ebene.

c) Für welche Zahlen $z = x + jy$ gilt

(3) $j + 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\} = z$?

d) Für welche positive reelle Konstante A ergibt die Überlagerung der beiden harmonischen Schwingungen

(4) $A\sin(2t) + 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$

eine reine Cosinus-Schwinung?
(Lösung zeichnerisch und rechnerisch mit Hilfe komplexer Zeigeraddition)

3a) $z = 2e^{j180°}\left[\cos(-135°) + j\sin(-135°)\right]^{10}$

$z = 2e^{j180°}\left[e^{j(-135°)}\right]^{10} = 2e^{j180°} \cdot e^{-j1350°}$

$z = 2e^{j180°} \cdot e^{-j(3\cdot 360° + 270°)} = 2e^{j(180° - 270°)}$

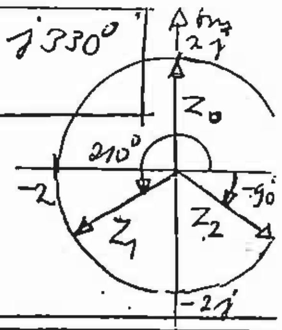
$\boxed{z = 2e^{-j90°} = 2e^{j270°} = 2e^{j3\pi/2} = -2j}$ (2)

3b) $z^3 = -8\frac{(1+j)}{(1-j)} = -8 \cdot \frac{e^{j45°}}{e^{j(-45°)}} = 8e^{j180°} e^{j90°}$

$z^3 = 8e^{j270°} = 8e^{j(270° + k360°)}$

$z = \sqrt[3]{8} \cdot e^{j\left(\frac{270° + k360°}{3}\right)} = 2 \cdot e^{j(90° + k120°)}$

$z_0 = 2e^{j90°}$ j	$z_1 = 2e^{j210°}$	$z_2 = 2e^{j330°}$
$z_1 = -\sqrt{3} - j$	$z_2 = \sqrt{3} - j$	



(3)

3c) $j + 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\} = z \Rightarrow j + 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{(x-jy)}{(x+jy)(x-jy)}\right\} = x + jy$

$j + \frac{2x}{x^2+y^2} = x + jy \Rightarrow \boxed{y = 1}$ und $x\left\{\frac{2}{x^2+y^2} - 1\right\} = 0 \Rightarrow$ (3)

$\boxed{x_1 = 0}$ $\frac{2}{x^2+y^2} - 1 = 0 \Rightarrow 2 = x^2 + y^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_{2/3} = \pm 1}$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = x_1 + j \cdot 1 = j}$ $\boxed{z_2 = x_2 + j = 1 + j}$ $\boxed{z_3 = x_3 + j = -1 + j}$

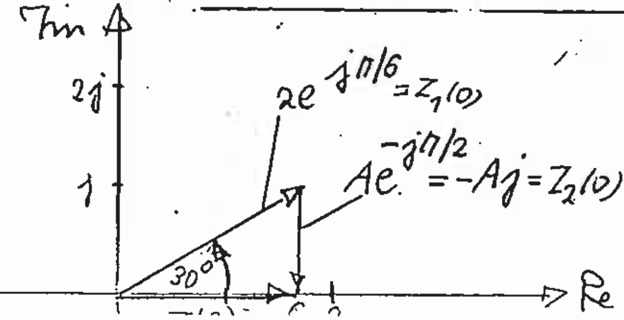
3d) $A\sin(2t) + 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = A\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$

$A\cos(2t - \pi/2) + 2\cos(2t + \pi/6) = C \cdot \cos(2t)$ mit $C > 0$

$Ae^{j(-\pi/2)} + 2e^{j\pi/6} = Ce^{j0} = C$

$-Aj + 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\} = j\left(2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - A\right) + 2\cos\frac{\pi}{6}$ (4)

$j(1-A) + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = C \Rightarrow C = \sqrt{3}$ und $\boxed{A = 1}$



Aus Skizze folgt:
$A = 2\sin 30° = 1$
$z(0) = C = 2\cos 30°$
$z(0) = C = \sqrt{3}$