BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Studienfach: Mathematik
Klausur

Datum: 18.03.2005

Ausbildungsbereich: Technik
Studienjahrgang: 2005
Fachrichtung: Maschinenbau
Studienhalbjahr: 1
Gruppe:
Bearbeitungszeit: 100 Minuten
Dozent: Bauer, Bauer, Baum, Schäffler
Hilfsmittel: Alle, außer elektronische Rechner
Bewertung: Punkte: .... Note: .... Signum: ....

Student: ....

Aufgabe 1 (35 min.) (23)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{p} = (1,1,0)$, $\vec{q} = (-1,0,1)$, $\vec{r} = (2,0,2)$.

a) Man berechne den Winkel zwischen $\vec{p}$ und $\vec{q}$ sowie die Länge der Projektion des Vektors $\vec{p} + \vec{q}$ auf die Richtung von $\vec{r}$.

b) Man gebe einen Vektor $\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = 1$ an, der auf $\vec{q}$ und $\vec{p} + \vec{r}$ senkrecht steht.

c) Es sei $\vec{a} = (a, 2, 5)$, $\vec{b} = (0, b, -2)$, $\vec{c} = (6, 3a, 0)$.
Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$

(i) stehen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ paarweise senkrecht aufeinander ?

(ii) sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar ?

d) Geben sind die Vektoren $\vec{a} = (5,6,1)$ und $\vec{b} = (-8,-8,6)$. Man ermittle zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$, für die gilt: $\vec{y}$ ist parallel zu $\vec{b}$, $\vec{x}$ steht senkrecht auf $\vec{b}$, und $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$.

e) Gegeben seien die Punkte $P_1(1\,|\,2\,|\,3)$ und $P_2(3\,|\,5\,|\,1)$, sowie die Ebenenschar

$$E_k : \quad (k+2)x + 3y + (k+2)z = 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Gerade g, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht, zu keiner der Ebenen E_k parallel ist.

(ii) Für welches k ist E_k parallel zur x-z-Ebene ?

30

Aufgabe 2 (45 min.) ~~27~~

a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist der Real- bzw. Imaginärteil von $(\sqrt{3} + j)^n$ null ?

b) Skizzieren Sie die Kurve in der komplexen Zahlenebene, die durch die Gleichung

$zz^* - 3jz + 3jz^* + 8 = 0$ beschrieben wird.

(Hinweis: z^* sei die zu z konjugiert komplexe Zahl)

c) Gegeben sei die komplexen Zahl

$$z_1 = \frac{3}{2}j + \frac{2-j}{(1+j)^2}\,.$$

(i) Man bestimme Real- und Imaginärteil von z_1 sowie z_1^5.

(ii) Wie lauten alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $(w - z_1)^4 = -16$?
(Real- und Imaginärteil sind nicht verlangt.)

d) Untersuchen Sie die folgenden komplexwertigen Funktionen der reellen Variablen t; $z = z(t)$, $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die zugehörigen Ortskurven:

(i) $z = 3 + 2e^{jt}$ (ii) $z = 1 + t(1 - j)$

e) Die Schwingung $x(t) = 2\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$ entsteht durch Überlagerung der drei gleichfrequenten Teilschwingungen mit Kreisfrequenz $\omega > 0$:

$$x_1(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

$$x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_3(t) = \sqrt{6}\cos(\omega t + \frac{3\pi}{4})$$

Bestimmen Sie $A > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ mit Hilfe komplexer Zeiger sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch, so dass also gilt: $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$.

.

Aufgabe 3 (20 min.) 13

Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ besitzt das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + \alpha x_4 &= \beta \end{aligned}$$

a) eine eindeutige Lösung ; man gebe diese Lösung an.

b) mehrere Lösungen ; man gebe die allgemeine Lösung an.

c) keine Lösung ?

d) man bestimme die Determinante der Systemmatrix $\underline{A}$.

Wir wünschen Ihnen einen kühlen Kopf und gutes Gelingen!

$\boxed{A2}$ c)

(i) $$z_1^5 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{3\pi j/4}\right)^5 = \frac{1}{32}\cdot 2\cdot 2\cdot \sqrt{2}\, e^{15\pi j/4} \underset{2}{=} \frac{\sqrt{2}}{8} e^{j\,7/4\,\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} e^{j\left(2\pi+\frac{7}{4}\pi\right)} \underset{2}{=} \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + j\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{8} - \frac{1}{8} j}$$

(ii) $$(w-z_1)^4 = -16 = 16 e^{j\pi} \Rightarrow \boxed{w_k = 2 e^{j\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)} + z_1} \quad (k=0,1,2,3)$$

Nicht verlangt!

$$w_0 = 2e^{j\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{3\pi j/4} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + j\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} j - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j = \boxed{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + j\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$w_1 = 2e^{j\frac{3}{4}\pi} + z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + j\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) - 1 + \frac{1}{2} j = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j =$$

$$= -\sqrt{2} + j\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j = \boxed{-\sqrt{2} - \frac{1}{2} + j\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$w_2 = 2e^{j\frac{5}{4}\pi} + z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + j\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) - 1 + \frac{1}{2} j = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j =$$

$$= -\sqrt{2} - j\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j = \boxed{-\sqrt{2} - \frac{1}{2} + j\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)}$$

$$w_3 = 2e^{j\frac{7}{4}\pi} + z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + j\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) - 1 + \frac{1}{2} j = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j =$$

$$= \sqrt{2} - j\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j = \boxed{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + j\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)}$$

A2

a) $z = (\sqrt{3}+1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$

5

$$\boxed{z = 2e^{j\frac{\pi}{6}\cdot n}}$$

$\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z$ rein imaginär

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}n = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 3 + 6k$

2

$$\Rightarrow \boxed{n \in \{3, 9, 15, 21, \dots\}}$$

2

$\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z$ rein reell $\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}\cdot n = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = 6k \Rightarrow \boxed{n \in \{6, 12, 18, \dots\}}$

2 2

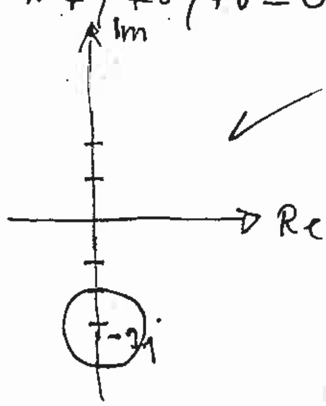
b) $z = x + jy \Leftrightarrow z^* = x - jy$: $\quad zz^* - 3jz + 3jz^* + 8 = 0$

4

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 3j(x+jy) + 3j(x-jy) + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 6y + 9 = 9 - 8 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + (y+3)^2 = 1}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Kreis um } (0|-3) \text{ mit Radius } 1}$



c) $\boxed{z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Re}(z_1) = -\frac{1}{2}} \quad \boxed{\mathrm{Im}(z_1) = \frac{1}{2}}$

8

(i)

$|z_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \; \varphi_1 = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{3\pi j/4}}$

(ii) $\boxed{\cancel{z_2 = 2e^{\pi j/4}}}$

$$\cancel{z_2^5 = 2^5 e^{\pi j\, 5/4} = 32\left(\cos\frac{5}{4}\pi + j\sin\frac{5}{4}\pi\right) = 32\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) =}$$

$$\cancel{= \boxed{-\sqrt{2}\cdot 16(1+j)}}$$

$\boxed{A2}$ e) 7

$$2\cos\left(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{2}\sin\left(\omega t - \tfrac{\pi}{4}\right) + A\cdot\cos(\omega t + \varphi) + \sqrt{6}\cos\left(\omega t + \tfrac{3}{4}\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\omega t - \tfrac{3}{4}\pi\right) + A\cos(\omega t + \varphi) + \sqrt{6}\cos\left(\omega t + \tfrac{3}{4}\pi\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{2e^{j\frac{2}{3}\pi}}_{=:\,z_0} = \underbrace{\sqrt{2}\,e^{-j\frac{3}{4}\pi}}_{=:\,z_{10}} + \underbrace{Ae^{j\varphi}}_{=:\,z_{20}} + \underbrace{\sqrt{6}\cdot e^{j\frac{3}{4}\pi}}_{=:\,z_{30}}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{20} = z_0 - z_{10} - z_{30}}$$

$$\Rightarrow Ae^{j\varphi} = 2\left(\cos\tfrac{2}{3}\pi + j\sin\tfrac{2}{3}\pi\right) - \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3}{4}\pi - j\sin\tfrac{3}{4}\pi\right) - \sqrt{6}\left(\cos\tfrac{3}{4}\pi + j\sin\tfrac{3}{4}\pi\right)$$

$$\Rightarrow Ae^{j\varphi} = 2\left(-\tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - j\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{6}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + j\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Ae^{j\varphi} = \underbrace{-1 + j\sqrt{3}}_{z_0} + \underbrace{1 + j}_{z_{10}} + \underbrace{\sqrt{3} - j\sqrt{3}}_{z_{30}} = \sqrt{3} + j$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 2} \quad \boxed{\varphi = \arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tfrac{\pi}{6} \mathrel{\hat{=}} 30^\circ}$$

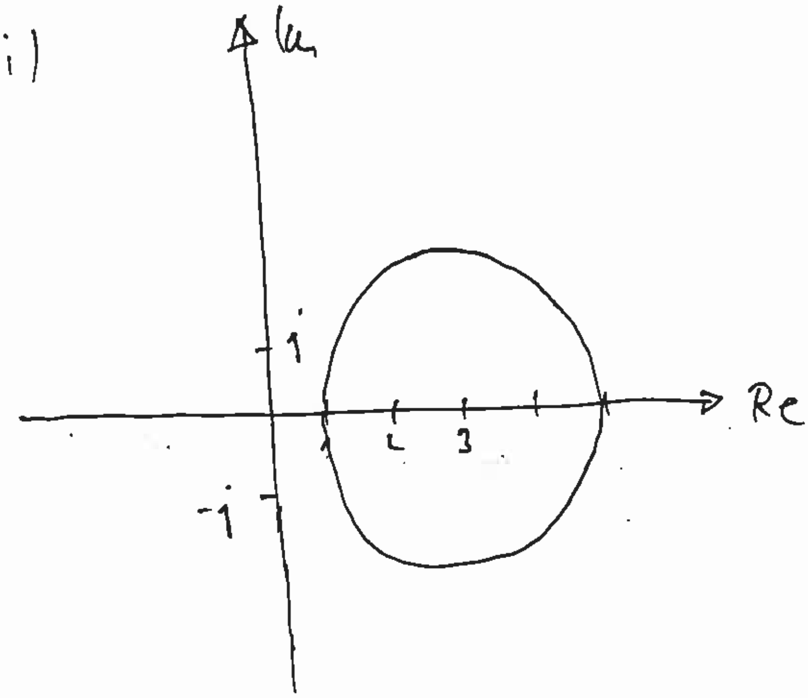
A2 d) 6

i) $z = 3 + 2e^{jt} \iff |z-3| = 2$

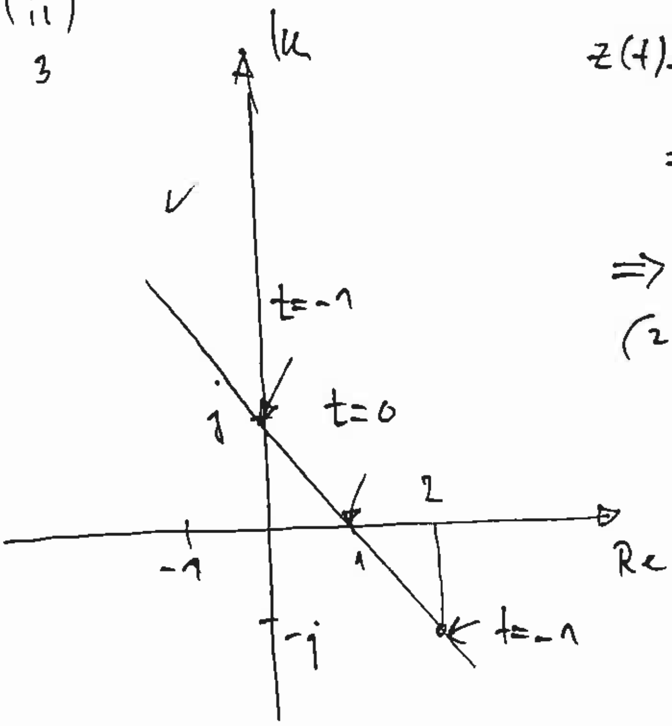
3

$\iff (x-3)^2 + y^2 = 4 \iff$ Kreis um $(3|0)$ mit Radius 2

(i)



(ii)
3



$z(t) = 1 + t(1-j) = 1 + t - tj$

$= x(t) + j\,y(t)$

$\Rightarrow x := x(t) = 1 + t \Rightarrow (1)\ t = x - 1$

$(2)\ y := y(t) = -t$

(1) in (2): $\boxed{y = -x + 1}$

Gerade mit Steigung -1
und y-Achsenabschnitt 1.

e) Ein Ri.vektor $\vec{v}$ d. Gerade g durch P_1, P_2

6 lautet: $\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_1P_2}}$ ✓

Wäre g zu E_k parallel, so müsste $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, wobei $\vec{n}$ d. NV d. Ebene E ist. Dies führt zu einem Widerspruch:

Denn: $\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}_k = 2(k+2) + 9 - 2(k+2) \neq 0}$ ↯

(ii) Die x-z-Ebene lautet $y=0$ und hat den NV:

$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}_{xz\text{-Ebene}}}$ ✓

E_k ist parallel zur x-z-Ebene, wenn d. NV von E_k ein Vielfaches von diesem Vektor ist, wenn also gilt:

$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} k+2 \\ 3 \\ k+2 \end{pmatrix}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \quad \boxed{k=-2}$ ✓

$\lambda(k+2) = 0 \Rightarrow k = -2$

$\lambda = \frac{1}{3}$

$\lambda(k+2) = 0 \Rightarrow k = -2$

✓

$\boxed{A1}$ $\boxed{23}$

a) $\cos(\vec{p},\vec{q}) = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \dfrac{2\pi}{3} \mathrel{\widehat{=}} 120^\circ}$

(3)

Länge d. Proj. $\boxed{\left|\dfrac{(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

b) $\boxed{\vec{n} = \pm \dfrac{\vec{q}\times(\vec{p}+\vec{r})}{|\vec{q}\times(\vec{p}+\vec{r})|} = \mp \dfrac{1}{\sqrt{27}}(1,-5,1)}$; $\vec{p}+\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

(3)

$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$

c) (i) $(\vec{a}\perp\vec{b}) \wedge (\vec{a}\perp\vec{c}) \wedge (\vec{b}\perp\vec{c}) \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \wedge \vec{a}\cdot\vec{c}=0 \wedge \vec{b}\cdot\vec{c}=0$

(5) (3) $\Leftrightarrow 2b=10 \wedge 6a+6a=0 \wedge 3ab=0 \Leftrightarrow \boxed{b=5} \wedge \boxed{a=0}$

(ii) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ komplanar $\Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & 5 \\ 0 & b & -2 \\ 6 & 3a & 0 \end{vmatrix} = 0$

(2) $\Leftrightarrow a(0+6a)+6(-4-5b)=0 \Leftrightarrow a^2-4-5b=0$

$a=r\in\mathbb{R} \Rightarrow b=\frac{1}{5}(r^2-4) \Leftrightarrow \boxed{(a,b)=\left(r,\tfrac{1}{5}(r^2-4)\right),\ r\in\mathbb{R}}$

d) $\vec{y}\parallel\vec{b} \Rightarrow \vec{y} = \lambda(-8,-8,6),\ \lambda\in\mathbb{R}$

(6) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a} \Rightarrow x_1 = 5+8\lambda,\ x_2 = 6+8\lambda,\ x_3 = 1-6\lambda$

$\vec{x}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{b}=0 = -8x_1-8x_2+6x_3 = -8(5+8\lambda)-8(6+8\lambda)+6(1-6\lambda)$

$= -82-164\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = -\tfrac{1}{2}}$

$\boxed{\vec{y}=(4,4,-3)}$ $\boxed{\vec{x}=(1,2,+4)}$

A3 ~~12~~ 13

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \Big| \left(-\tfrac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \Big| \left(-\tfrac{2}{3}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \Big| \left(-\tfrac{3}{4}\right)$$

3

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{3}{4} & \beta \end{array}\right)$$

a) Eind. Lsg. $\Leftrightarrow$ $\boxed{Rg\ \underline{A} = Rg(\underline{A}|\underline{b}) = 4}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq \frac{3}{4}$

3,5

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{\beta}{4\alpha - 3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\frac{\checkmark}{2}$

b) mehrere Lsgen. (∞-viele) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\alpha = \frac{3}{4} \wedge \beta = 0}$

3

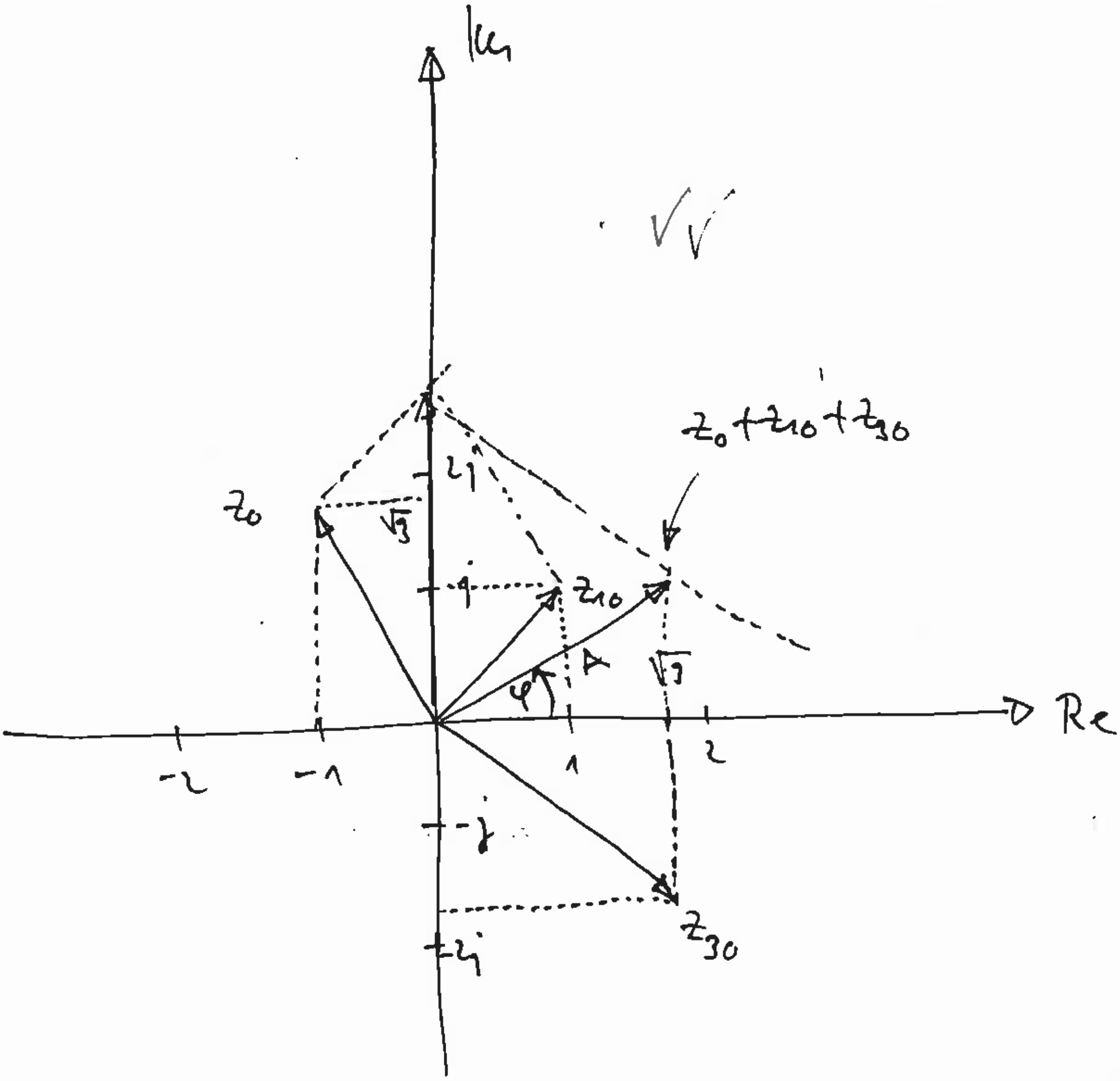
$\Leftrightarrow$ $\boxed{Rg\ \underline{A} = Rg(\underline{A}|\underline{b}) < 4}$ $\Rightarrow$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

c) keine Lsg. $\Leftrightarrow$ $\boxed{Rg\ \underline{A} \neq Rg(\underline{A}|\underline{b})}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\alpha = \frac{3}{4} \wedge \beta \neq 0}$ $\frac{\checkmark}{2}$

1,5

d) $\boxed{\det \underline{A} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\left(\alpha - \frac{3}{4}\right) = 4\alpha - 3}$

2



Im
Re
$z_0+z_{10}+z_{30}$
z_0
z_{10}
z_{30}
$2j$
j
$-j$
$-2j$
$\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
φ
-2
-1
1
2